



BRIN
BADAN RISET
DAN INOVASI NASIONAL

Ahmedi Asraf

Mekanika Material Komposit Dari Lamina hingga Laminat

Mekanika Material Komposit Dari Lamina hingga Laminat

Buku ini tidak diperjualbelikan.

Diterbitkan pertama pada 2024 oleh Penerbit BRIN
Tersedia untuk diunduh secara gratis: penerbit.brin.go.id



Buku ini di bawah lisensi Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0).

Lisensi ini mengizinkan Anda untuk berbagi, mengopi, mendistribusikan, dan mentransmisi karya untuk penggunaan personal dan bukan tujuan komersial, dengan memberikan atribusi sesuai ketentuan. Karya turunan dan modifikasi harus menggunakan lisensi yang sama.

Informasi detail terkait lisensi CC BY-NC-SA 4.0 tersedia melalui tautan: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ahmedi Asraf

**Mekanika
Material Komposit
Dari Lamina hingga Laminat**

Penerbit BRIN

Buku ini tidak diperjualbelikan.

© 2024 Ahmedi Asraf

Katalog dalam Terbitan (KDT)

Mekanika Material Komposit: Dari Lamina hingga Laminat/Ahmedi Asraf–Jakarta: Penerbit BRIN, 2024

xvi + 336 hlm.; 16,1 × 24,1 cm.

ISBN 978-623-8372-73-7 (e-book)

- | | |
|----------------------|------------|
| 1. Material Komposit | 2. Lamina |
| 3. Laminat | 4. Matriks |
| 5. Mekanika Klasik | |




620.118

Editor Akuisisi & Pendamping : Noviasuti Putri Indrasari
Copy Editor : Anton Winarko
Proofreader : Hilda Yunita & Martinus Helmiawan
Penata Isi : Rina Kamila
Desainer Sampul : Dhevi E.I.R. Mahelingga

Edisi Pertama : Juli 2024



Diterbitkan oleh:
Penerbit BRIN, Anggota Ikapi
Direktorat Repositori, Multimedia, dan Penerbitan Ilmiah
Gedung B.J. Habibie Lt. 8, Jl. M.H. Thamrin No. 8,
Kb. Sirih, Kec. Menteng, Kota Jakarta Pusat,
Daerah Khusus Ibukota Jakarta 10340
WhatsApp: +62 811-1064-6770
E-mail: penerbit@brin.go.id
Website: penerbit.brin.go.id

 Penerbit BRIN
 @Penerbit_BRIN
 @penerbit.brin

Buku ini tidak diperjualbelikan.

Untuk kedua orang tuaku,
Refrizal dan Y.Y. Iriani;
istriku, Desy Viani;
putraku, Hamdan Nafis;
dan siapa pun yang sungguh-sungguh, tekun,
dan sabar dalam belajar. Selamat berjuang!
*Pasa jalan dek batampuah,
lanca kaji dek baulang.*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR	x
PENGANTAR PENERBIT	xiii
PRAKATA.....	xv
BAB I PENDAHULUAN.....	1
A. Apa itu Material Komposit?	2
B. Lamina dan Laminat.....	3
C. Tegangan Normal	3
D. Tegangan Geser.....	6
E. Tegangan pada Bidang Miring Material.....	8
F. Regangan Normal.....	13
G. Kurva tegangan vs. regangan dan Modulus Young	14
H. Rasio Poisson.....	16
I. Regangan Geser dan Modulus Geser.....	19
J. Usaha	21
K. Jenis-Jenis Material Komposit yang Lain.....	25
Soal-soal.....	25
BAB II MIKROMEKANIK LAMINA	29
A. Mekanisme Transfer Beban ke Serat	30
B. Fraksi Volume	31
C. Elemen Volume Representatif	34
D. Modulus Young pada arah Longitudinal	35
E. Modulus Young pada arah Transversal	38
F. Rasio Poisson Utama	41
G. Modulus Geser.....	43
H. Kekuatan Tarik pada Arah Longitudinal	46
BAB III LAMINA PADA SISTEM KOORDINAT UTAMA	53
A. Sistem Koordinat Utama.....	54
B. Regangan Akibat Tegangan pada Arah 1	55
C. Regangan Akibat Tegangan pada Arah 2	58
D. Regangan Akibat Tegangan pada Arah 3	60
E. Tegangan Geser pada Lamina.....	62
F. Hubungan Umum antara Tegangan dan Regangan pada Sistem Koordinat Utama	65
G. Teorema Resiprokal Maxwell-Betti.....	71
H. Implikasi Teorema Resiprokal Maxwell-Betti.....	73
I. Asumsi Tegangan Bidang dan Matriks Komplian Tereduksi	79

J. Matriks Kekakuan Tereduksi.....	81
Soal-soal.....	86
BAB IV LAMINA PADA SISTEM KOORDINAT GLOBAL	89
A. Sistem Koordinat Global	90
B. Transformasi Tegangan	90
C. Transformasi Regangan	95
D. Matriks Komplian Tereduksi yang Ditransformasi	102
E. Matriks Kekakuan Tereduksi yang Ditransformasi	111
F. Modulus Young pada Sistem Koordinat Global	116
G. Rasio Poisson pada Sistem Koordinat Global	120
H. Modulus Geser pada Sistem Koordinat Global	124
I. Rasio Kopel akibat Tegangan Geser.....	127
J. Rasio Kopel akibat Tegangan Normal.....	130
Soal-soal.....	132
BAB V TEGANGAN DAN REGANGAN LAMINAT	135
A. Penamaan Laminat	136
B. Asumsi Dasar Laminat	137
C. Perpindahan Elemen Laminat.....	139
D. Regangan Laminat.....	142
E. Tegangan Laminat	150
Soal-soal.....	172
BAB VI RESULTAN TEGANGAN DAN RESULTAN MOMEN.....	175
A. Resultan Tegangan	176
B. Resultan Momen.....	177
C. Hubungan Resultan Tegangan dengan Regangan dan Kelengkungan Bidang Referensi	179
D. Hubungan Resultan Momen dengan Regangan dan Kelengkungan Bidang Referensi	182
E. Matriks ABD	184
F. Invers matriks ABD	203
G. Kopel pada Laminat.....	209
H. Laminat Simetris.....	212
I. Modulus Young Laminat.....	214
J. Modulus Geser Laminat	217
K. Rasio Poisson Laminat	218
Soal-soal.....	219

BAB VII KEKUATAN MATERIAL KOMPOSIT.....	221
A. Kekuatan Lamina.....	222
B. Rasio Kekuatan.....	228
C. Diagram Batas Kekuatan Lamina	230
D. Kekuatan Laminat dan Kegagalan Lapisan Pertama	238
E. Resultan Tegangan dan Resultan Momen pada Elemen Cangkang	245
F. Kriteria Kegagalan Regangan Maksimum.....	262
Soal-soal.....	265
BAB VIII EFEK HIGROTHERMAL.....	267
A. Regangan Termal Bebas pada Lamina	268
B. Hubungan antara Tegangan dan Regangan dengan Memperhitungkan Efek Termal	270
C. Hubungan antara Tegangan dan Regangan dengan Memperhitungkan Efek Higrotermal	273
D. Asumsi Tegangan Bidang dengan Memperhitungkan Efek Higrotermal.....	276
E. Transformasi Regangan dengan Memperhitungkan Efek Higrotermal.....	279
F. Tegangan dan Regangan pada Sistem Koordinat Global dengan Memperhitungkan Efek Higrotermal.....	284
G. Tegangan dan Regangan pada Laminat dengan Memperhitungkan Efek Higrotermal	288
H. Resultan Tegangan	301
I. Resultan Momen dengan Efek Higrotermal	304
J. Matriks <i>ABD</i> dengan Efek Higrotermal	309
K. Koefisien Deformasi Termal dan Koefisien Deformasi Kelembapan	315
L. Efek Higrotermal terhadap Kekuatan	320
M. Tegangan Sisa saat Proses Fabrikasi	326
Soal-soal.....	327
DAFTAR PUSTAKA	329
TENTANG PENULIS	331
INDEKS.....	332

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Peta Konsep Bab I..... 1

Gambar 1.2 Sketsa material komposit diperkuat serat kontinu yang ditarik pada arah serat. 2

Gambar 1.3 Lapisan Material Komposit..... 3

Gambar 1.4 Permukaan ΔA yang Menerima Gaya ΔF 4

Gambar 1.5 Sebuah Batang yang Ditarik dengan Gaya Sebesar F 8

Gambar 1.6 Tegangan-Tegangan pada Bidang Elemen Material 10

Gambar 1.7 Lamina yang Mengalami Penarikan..... 11

Gambar 1.8 Sebuah Batang dengan Panjang L yang Mengalami Regangan .. 13

Gambar 1.9 Kurva Tegangan vs. Regangan 15

Gambar 1.10 Kontraksi Lateral Akibat Penarikan 17

Gambar 1.11 Tegangan Geser dan Regangan Geser pada Elemen Material..... 20

Gambar 1.12 Gaya F yang Bekerja pada Partikel yang Bergerak Sejauh dx ... 22

Gambar 1.13 Perubahan Panjang Batang Akibat Gaya F 22

Gambar 1.14 Grafik Besar Gaya F vs. Perubahan Panjang Δx 23

Gambar 2.1 Peta Konsep Bab II 29

Gambar 2.2 Mekanisme Transfer Beban pada Material Komposit (Lamina)..... 30

Gambar 2.3 Penyederhanaan Lamina untuk Analisis Konsep Mikromekanika 34

Gambar 2.4 Elemen Volume Representatif yang Menerima Gaya pada Arah Longitudinal 35

Gambar 2.5 Grafik Modulus Young E_{k1} vs. Fraksi Volume Serat V_s 37

Gambar 2.6 Elemen Volume Representatif yang Ditarik pada Arah Transversal 39

Gambar 2.7 Grafik Modulus Young E_{k2} vs. Fraksi Volume Serat V_s 40

Gambar 2.8 Deformasi Geser yang Dialami oleh Elemen Volume Representatif 43

Gambar 2.9 Grafik Modulus Geser G_{k12} vs. Fraksi Volume Serat V_s 45

Gambar 2.10 Grafik Modulus Geser G_{k12} vs. Fraksi Volume Serat V_s 48

Gambar 3.1 Peta Konsep Bab III 53

Gambar 3.2 Sistem Koordinat Utama..... 54

Gambar 3.3 Tegangan pada arah 1 menyebabkan regangan pada arah 1, 2, dan 3..... 55

Gambar 3.4 Tegangan pada arah 1 menyebabkan regangan pada arah 2, 1, dan 3..... 58

Buku ini tidak diperjualbelikan.

Gambar 3.5	Tegangan pada arah 3 menyebabkan regangan pada arah 3, 1, dan 2.....	61
Gambar 3.6	Tegangan Geser yang Bekerja pada Elemen Lamina.....	63
Gambar 3.7	Tegangan geser τ_{12} menyebabkan deformasi berupa regangan geser γ_{12}	63
Gambar 3.8	Tegangan geser τ_{13} menyebabkan deformasi berupa regangan geser γ_{13}	64
Gambar 3.9	Tegangan geser τ_{23} menyebabkan deformasi berupa regangan geser γ_{23}	64
Gambar 3.10	Perubahan Panjang Lamina Akibat Gaya pada Arah 1 Kemudian Arah 2.....	71
Gambar 3.11	Perubahan Panjang Lamina Akibat Gaya pada Arah 2 Kemudian Arah 1.....	73
Gambar 3.12	Elemen Lamina dengan Panjang Sisi-sisinya Sebesar Δ_1 , Δ_2 , dan Δ_3	74
Gambar 4.1	Peta Konsep Bab IV.....	89
Gambar 4.2	Sistem Koordinat Utama dan Sistem Koordinat Global.....	90
Gambar 4.3	Sketsa Elemen Lamina untuk Transformasi Tegangan.....	91
Gambar 4.4	Elemen Lamina yang Mengalami Regangan pada Berbagai Arah.....	96
Gambar 4.5	Rotasi Garis Diagonal Elemen Lamina Akibat Regangan.....	98
Gambar 4.6	Komponen-Komponen Matriks Kekakuan Tereduksi yang Ditransformasi sebagai Fungsi θ	113
Gambar 4.7	Elemen Lamina yang Menerima Tarikan pada Arah x	116
Gambar 4.8	Elemen Lamina yang Menerima Tarikan pada Arah y	118
Gambar 4.9	Elemen Lamina yang Menerima Tegangan Geser τ_{xy}	125
Gambar 5.1	Peta Konsep Bab 5.....	135
Gambar 5.2	Sketsa Laminat pada Sistem Koordinat xyz	136
Gambar 5.3	Pelat Lamina yang Dilalui Garis AA'	137
Gambar 5.4	Elemen Laminat pada Bidang xz	138
Gambar 5.5	Elemen Laminat pada Gambar 5.3 yang Ditinjau dari Bidang xz	140
Gambar 5.6	Elemen Laminat pada Gambar 5.3 yang Ditinjau dari Bidang yz	141
Gambar 5.7	Ilustrasi Besaran $\partial^2 w_0 / \partial x \partial y$	145
Gambar 6.1	Peta Konsep Bab VI.....	175
Gambar 6.2	Resultan Tegangan dan Resultan Tegangan Geser yang bekerja pada Elemen Laminat.....	176
Gambar 6.3	Ilustrasi Momen terhadap Bidang Referensi yang Dihasilkan oleh Tegangan σ_{xk}	178

Gambar 6.4	Resultan Tegangan dan Resultan Tegangan Geser yang Bekerja pada Elemen Laminat	178
Gambar 6.5	Laminat Simetris	213
Gambar 7.1	Peta Konsep Bab 7	221
Gambar 7.2	Lamina yang Ditarik oleh Gaya F_x	222
Gambar 7.3	Elemen cangkang.	246
Gambar 8.1	Peta Konsep Bab 8	268
Gambar 8.2	Pengaruh Suhu pada Elemen Lamina dengan Dimensi $\Delta 1$, $\Delta 2$, dan $\Delta 3$	268
Gambar 8.3	Lamina pada Lapisan 1, 2, dan 3 yang Memiliki Perbedaan Koefisien Deformasi Termal	289

PENGANTAR PENERBIT

Sebagai penerbit ilmiah, Penerbit BRIN mempunyai tanggung jawab untuk terus berupaya menyediakan terbitan ilmiah yang berkualitas. Upaya tersebut merupakan salah satu perwujudan tugas Penerbit BRIN untuk turut serta membangun sumber daya manusia unggul dan mencerdaskan kehidupan bangsa sebagaimana yang diamanatkan dalam pembukaan UUD 1945.

Material komposit memiliki banyak keunggulan dibandingkan dengan material-material yang lain. Salah satu keunggulan tersebut adalah sifatnya yang kuat, kaku, sekaligus ringan. Material dengan sifat-sifat yang seperti ini sangat diperlukan untuk pembuatan struktur ringan yang banyak diaplikasikan di berbagai bidang. Melihat luasnya penggunaan material komposit untuk pembuatan struktur ringan maka penjelasan yang komprehensif, sistematis, dan terperinci tentang material tersebut juga sangat diperlukan.

Pembahasan pada buku ini terfokus pada analisis tentang mekanika dari material komposit yang berupa lamina dan laminat pada skala makro. Inti dari pembahasan tersebut adalah berupa penjelasan tentang hubungan respons material komposit dengan gaya luar, perubahan suhu, dan perubahan tingkat kelembapan dari material komposit tersebut.

Buku ini ditulis dengan harapan dapat menjadi bacaan utama baik bagi pelajar, pengajar, maupun praktisi di bidang material komposit. Pembaca buku ini diasumsikan telah mempelajari kalkulus, aljabar linier dan fisika dasar mekanika. Pemahaman pembaca tentang mekanika material akan sangat membantu, tetapi pemahaman tersebut tidak menjadi prasyarat untuk mempelajari buku ini.

Kami berharap hadirnya buku ini dapat menjadi referensi bacaan untuk menambah wawasan dan pengetahuan bagi seluruh pembaca. Akhir kata, kami mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu proses penerbitan buku ini.

Penerbit BRIN

Buku ini tidak diperjualbelikan.

PRAKATA

Karena sifat-sifatnya yang unggul, material komposit sudah banyak diaplikasikan di berbagai bidang. Oleh sebab itu, penjelasan yang komprehensif, sistematis dan terperinci tentang material tersebut juga sangat diperlukan. Alhamdulillah, atas rahmat Allah Swt., saya bisa menyelesaikan buku tentang mekanika material komposit ini. Buku ini ditulis dengan harapan dapat menjadi bacaan utama bagi pelajar, pengajar, dan praktisi di bidang material komposit.

Pembaca buku ini diasumsikan telah mempelajari kalkulus, aljabar linier, dan dasar-dasar mekanika. Pemahaman pembaca tentang mekanika material akan sangat membantu, tetapi pemahaman tersebut tidak menjadi prasyarat untuk mempelajari buku ini. Pembahasan pada buku ini terfokus pada analisis tentang mekanika dari material komposit pada skala makro. Inti dari pembahasan tersebut adalah berupa penjelasan tentang hubungan respons material komposit dengan gaya luar, perubahan suhu, dan perubahan tingkat kelembapan dari material komposit tersebut.

Buku ini terdiri atas delapan bab yang berkaitan antara satu dan yang lainnya. Bab pertama menjadi dasar untuk mempelajari bab kedua, dan seterusnya. Oleh sebab itu, setiap bab pada buku ini harus dipelajari secara berurutan. Kemudian, untuk memudahkan pembaca, di setiap awal bab, terdapat peta konsep yang menunjukkan keterkaitan antar-subbab pada bab tersebut. Selain itu juga terdapat contoh-contoh soal terkait konsep-konsep yang diberikan.

Bab I berisi pengenalan terhadap material komposit. Salah satunya adalah tentang komponen penyusun material komposit yang terdiri atas serat dan matriks. Selain itu, bab tersebut juga berisi penjelasan tentang beberapa konsep dasar tentang mekanika material yang akan digunakan pada pembahasan bab-bab berikutnya.

Pada Bab II, dijelaskan konsep-konsep tentang mikromekanika material komposit. Mikromekanika material komposit merupakan ilmu tentang cara menentukan sifat-sifat material komposit yang dihasilkan berdasarkan sifat-sifat material penyusunnya, yaitu serat dan matriks. Artinya, pada bab ini, kita akan membahas interaksi antara serat dan matriks. Pembahasan tersebut akan membantu pembaca untuk memahami alasan material komposit memiliki sifat-sifat yang unggul dibandingkan dengan material-material konvensional.

Perlu diketahui bahwa material komposit dibuat dalam bentuk lapisan tipis yang disebut sebagai lamina. Bab III dan Bab IV berisi penjelasan tentang mekanika lamina tanpa meninjau interaksi antara serat dan matriks pada lamina tersebut.

Selanjutnya, perlu diketahui juga bahwa dalam pengaplikasiannya, material komposit biasanya dibuat dalam bentuk beberapa lapis lamina. Material komposit yang terdiri dari beberapa lapis lamina tersebut disebut

sebagai laminat. Bab V, Bab VI, Bab VII, dan Bab VIII berisi tentang analisis dari laminat tersebut.

Saya sudah mencoba melakukan yang terbaik yang bisa saya lakukan dan saya sangat berharap buku ini dapat memberikan panduan yang benar-benar membantu kepada siapa pun yang mempelajari material komposit. Banyak waktu, pikiran, dan tenaga yang sudah saya habiskan untuk menulis buku ini. Akan tetapi, saya menyadari bahwa buku ini tentu akan terus membutuhkan perbaikan. Oleh sebab itu, masukan dan kritikan terhadap buku ini sangat saya harapkan. Mudah-mudahan, apa yang kita lakukan memberikan sumbangsih besar terhadap ilmu pengetahuan di negeri ini.

Pada akhirnya, saya mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada siapa pun yang telah berjasa dalam pengerjaan buku ini, baik secara langsung maupun tidak langsung.

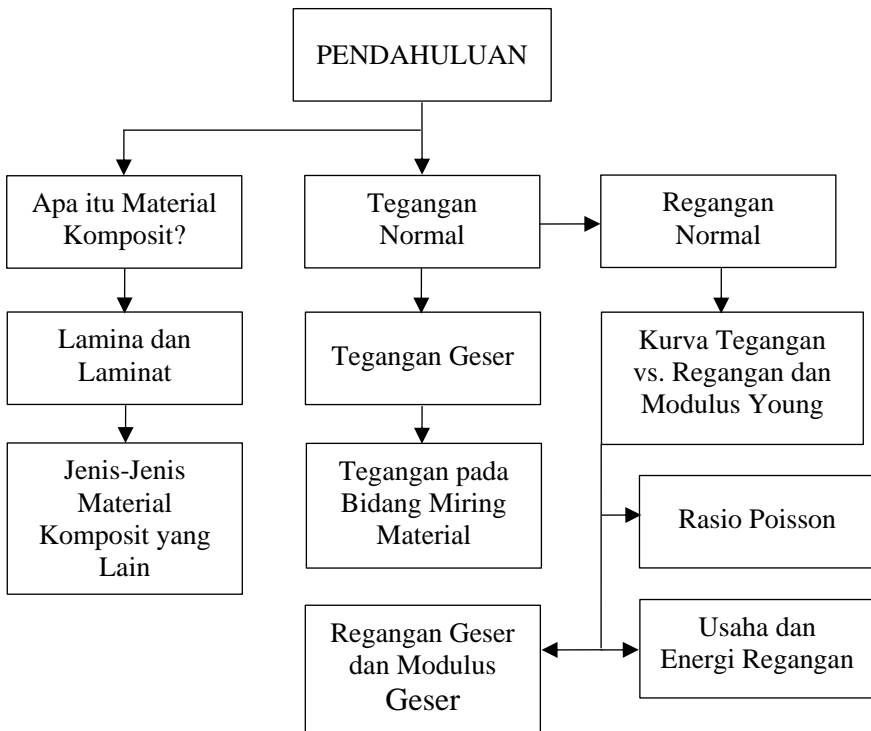
Bogor, Juni 2020

Ahmedi Asraf

BAB I

PENDAHULUAN

Era modern ini tidak bisa dipisahkan dari penggunaan material komposit. Misalnya, banyak bagian dari struktur pesawat terbang dan roket membutuhkan material dengan sifat yang kuat sekaligus ringan. Penggunaan material konvensional seperti besi tidak memungkinkan pemenuhan sifat yang seperti itu. Hal ini disebabkan material-material konvensional yang kuat cenderung berat. Sebaliknya, material-material yang ringan cenderung lemah. Oleh sebab itu, diperlukan material baru yang mengombinasikan kedua sifat tersebut sehingga memiliki sifat yang kuat sekaligus ringan. Material komposit merupakan material yang memiliki sifat seperti itu.



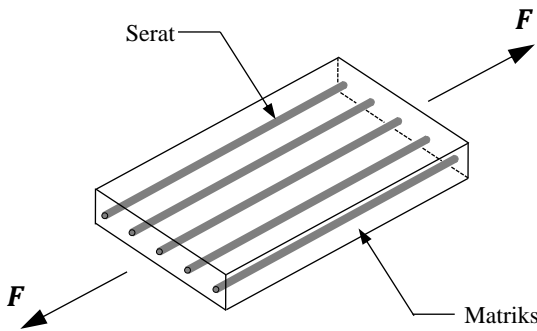
Gambar 1.1 Peta Konsep Bab I

Sebagaimana peta konsep yang ditunjukkan pada Gambar 1.1, dalam bab ini kita akan membahas definisi dan beberapa konsep tentang material komposit. Kemudian, kita juga akan membahas beberapa konsep dasar mekanika material.

Konsep-konsep tersebut pada bab-bab selanjutnya akan kita gunakan untuk membahas mekanika material komposit.

A. Apa itu Material Komposit?

Material komposit merupakan material yang dibuat dengan menggabungkan dua jenis penyusun pada skala makroskopik. Kedua penyusun itu disebut sebagai *matriks* dan *penguat*. Penguat ada yang berupa partikel, serat pendek, dan serat yang kontinu atau panjang. Serat berfungsi sebagai penguat yang ditanamkan di dalam matriks. Pada umumnya, beberapa contoh serat yang digunakan adalah serat karbon, serat aramid, dan serat kaca. Sementara itu, matriks biasanya terbuat dari material polimer, seperti epoksi dan poliester. Gambar 1.2 menunjukkan sketsa dari material komposit yang diperkuat serat searah yang kontinu. Pada buku ini, kita akan fokus membahas mekanika material komposit yang diperkuat serat seperti ini.

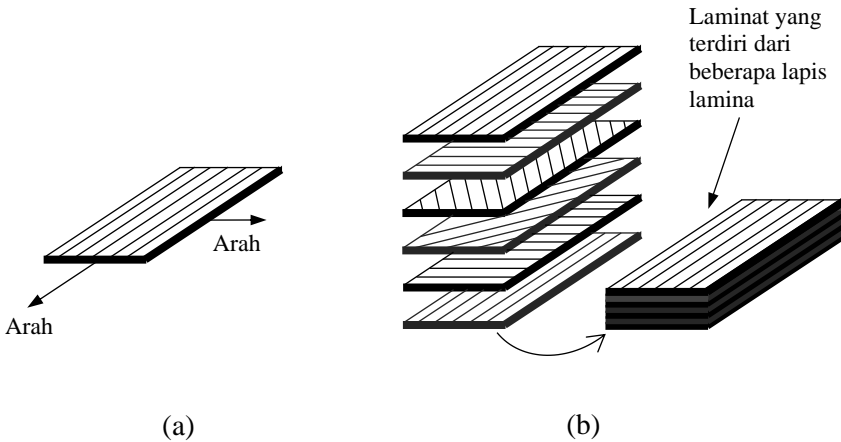


Gambar 1.2 Sketsa material komposit diperkuat serat kontinu yang ditarik pada arah serat.

Keunggulan sifat serat dan matriks digabungkan pada material komposit. Ketika material komposit ditarik pada arah serat seperti ditunjukkan pada Gambar 1.2, perlu diketahui bahwa sebagian tarikan yang dialami oleh matriks ditransfer ke serat. Dengan demikian, sifat serat yang kuat menutupi kelemahan matriks yang biasanya cukup lemah. Penjelasan yang lebih terperinci tentang cara transfer gaya ini akan kita bahas nanti. Selain itu, meskipun matriks lebih lemah, tetapi matriks memungkinkan serat tersusun secara rapi dan sejajar. Matriks juga memberikan perlindungan ke serat dari kerusakan dan zat kimia.

B. Lamina dan Laminat

Material komposit dibuat dalam bentuk lapisan tipis seperti ditunjukkan pada Gambar 1.2 dan 1.3a. Lapisan tipis ini disebut sebagai *lamina*. Berdasarkan Gambar 1.3a, arah yang searah dengan arah serat disebut sebagai *arah longitudinal* dan arah yang tegak lurus dengan arah serat disebut sebagai *arah transversal*. Salah satu sifat lamina adalah sangat kuat jika ditarik pada arah longitudinal, tetapi relatif lemah jika ditarik pada arah transversal.



Keterangan: (a) Lamina dan (b) Laminat
Gambar 1.3 Lapisan Material Komposit

Supaya material komposit kuat di segala arah, material komposit dibuat dalam bentuk lapisan yang terdiri dari beberapa lapis lamina yang arahnya berbeda-beda seperti ditunjukkan pada Gambar 1.3b. Material komposit yang terdiri dari beberapa lapis lamina ini disebut sebagai *laminat*.

C. Tegangan Normal

Sebelum mempelajari mekanika material komposit, mari kita bahas terlebih dahulu beberapa konsep dasar tentang mekanika material. Konsep-konsep tersebut adalah konsep tentang tegangan, regangan, elastisitas, dan rasio Poisson. Jenis tegangan terdiri atas tegangan normal dan tegangan geser. Pada bagian ini, kita akan membahas konsep tentang tegangan normal terlebih dahulu.

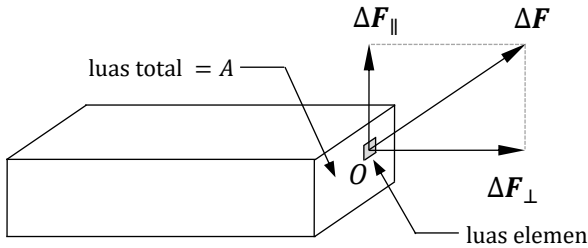
Gambar 1.4 menunjukkan sebuah batang dengan luas penampang sebesar A . Berdasarkan gambar tersebut, gaya total yang bekerja pada permukaan ΔA yang terletak di sembarang titik O adalah ΔF . Kemudian, besar

komponen gaya ΔF pada arah yang tegak lurus dan sejajar dengan permukaan ΔA secara berturut-turut adalah ΔF_{\perp} dan ΔF_{\parallel} . Dengan demikian, *tegangan normal* yang misalkan disimbolkan sebagai σ yang bekerja pada titik O , didefinisikan sebagai

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{\perp}}{\Delta A}$$

sehingga

$$\sigma = \frac{dF_{\perp}}{dA}. \tag{1.1}$$



Gambar 1.4 Permukaan ΔA yang Menerima Gaya ΔF

Jika gaya yang bekerja pada permukaan A terdistribusi secara merata, tegangan normal dapat ditulis sebagai

$$\sigma = \frac{F_{\perp}}{A}; \tag{1.2}$$

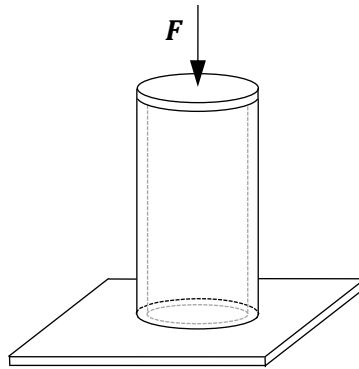
dengan F_{\perp} merupakan besar komponen gaya total yang tegak lurus dengan permukaan A . Berdasarkan persamaan (1.1) dan (1.2), dapat dilihat bahwa tegangan normal merupakan besar gaya per satuan luas. Dalam hal ini, gaya yang dimaksud adalah gaya yang tegak lurus dengan permukaan tempat gaya tersebut bekerja.

Jika gaya yang bekerja pada permukaan A tidak terdistribusi secara merata, rumusan tegangan normal yang diberikan oleh persamaan (1.2) dapat dianggap sebagai tegangan normal rata-rata yang bekerja pada permukaan A . Kemudian, kalau F_{\perp} merupakan besar gaya normal yang berupa gaya tarik, tegangan normal yang dihasilkan juga disebut sebagai *tegangan tarik*. Sementara itu, kalau F_{\perp} merupakan besar gaya normal yang berupa gaya tekan, tegangan normal yang dihasilkan disebut sebagai *tegangan tekan*. Selain itu,

telah disepakati bahwa tegangan tarik bernilai positif dan tegangan tekan bernilai negatif. Dengan demikian, kalau F_{\perp} merupakan besar gaya normal yang berupa gaya tekan, kita perlu menambahkan tanda minus pada ruas kanan persamaan (1.1) dan (1.2). Kemudian, perhatikan bahwa tegangan normal merupakan besaran skalar karena F_{\perp} merupakan besar komponen gaya yang tegak lurus dengan permukaan.

Contoh 1.1

Sebuah tabung ditekan dengan gaya sebesar $F = 120$ kN seperti ditunjukkan pada gambar di bawah. Jika diameter bagian luar tabung adalah $d_l = 14$ cm dan diameter bagian dalam tabung adalah $d_d = 12$ cm, tentukan tegangan tekan yang dialami oleh tabung tersebut.



Jawab

Persoalan ini dapat diselesaikan dengan menggunakan persamaan (1.2). Karena gaya yang bekerja merupakan gaya tekan, kita perlu menambahkan tanda minus pada ruas kanan persamaan tersebut. Kemudian, luas penampang tabung adalah A , yaitu

$$\begin{aligned} A &= \pi \left(\frac{d_l}{2} \right)^2 - \pi \left(\frac{d_d}{2} \right)^2 = \pi \frac{d_l^2}{4} - \pi \frac{d_d^2}{4} \\ &= \frac{\pi}{4} (d_l^2 - d_d^2). \end{aligned}$$

dengan $\pi(d_l/2)^2$ dan $\pi(d_d/2)^2$ secara berturut-turut adalah luas lingkaran dengan diameter d_l dan d_d . Dengan demikian, tegangan tekan yang dialami oleh tabung adalah

$$\begin{aligned}\sigma &= -\frac{F_{\perp}}{A} = -\frac{F_{\perp}}{\frac{\pi}{4}(d_t^2 - d_a^2)} \\ &= -\frac{120.000 \text{ N}}{\frac{\pi}{4}[(0,14 \text{ m})^2 - (0,12 \text{ m})^2]} \\ &= -29.397.354 \text{ Pa}\end{aligned}$$

Tanda minus menunjukkan bahwa tegangan yang bekerja merupakan tegangan tekan. Kemudian, satuan dari tegangan adalah pascal dan disingkat sebagai Pa, dengan $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$. Selain itu, karena $1 \text{ Pa} = 10^{-6} \text{ MPa}$, tegangan tekan σ juga bisa ditulis sebagai $-29,4 \text{ MPa}$.

D. Tegangan Geser

Tegangan normal dihasilkan oleh komponen gaya yang normal terhadap permukaan, sedangkan *tegangan geser* didefinisikan sebagai tegangan yang dihasilkan oleh gaya yang sejajar dengan permukaan. Berdasarkan Gambar 1.4, tegangan geser yang bekerja di titik O yang misalkan disimbolkan sebagai τ , didefinisikan sebagai

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{\parallel}}{\Delta A}$$

sehingga

$$\tau = \frac{dF_{\parallel}}{dA}. \quad (1.3)$$

Jika gaya yang bekerja pada permukaan A terdistribusi secara merata, tegangan geser τ dapat ditulis sebagai

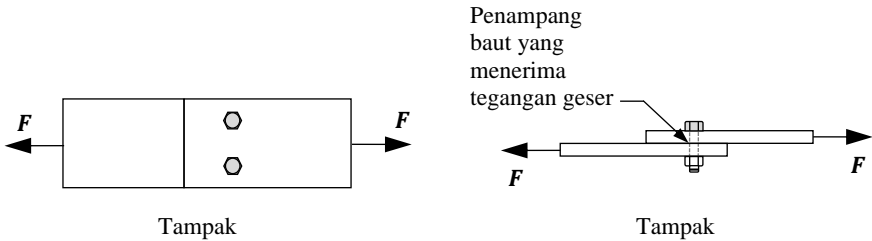
$$\tau = \frac{F_{\parallel}}{A}; \quad (1.4)$$

dengan F_{\parallel} merupakan besar komponen gaya total yang sejajar dengan permukaan A . Berdasarkan persamaan (1.3) dan (1.4), dapat dilihat bahwa tegangan geser merupakan besar gaya per satuan luas. Dalam hal ini, gaya yang dimaksud adalah gaya yang sejajar dengan permukaan di mana gaya tersebut bekerja.

Sama seperti tegangan normal, jika gaya yang bekerja pada permukaan A tidak terdistribusi merata, rumusan tegangan geser yang diberikan oleh persamaan (1.4) dapat dianggap sebagai tegangan geser rata-rata yang bekerja pada permukaan A .

Contoh 1.2

Dua buah pelat disambungkan dengan menggunakan dua baut seperti ditunjukkan pada gambar di bawah. Jika diameter baut adalah $d = 1 \text{ cm}$ dan kedua pelat menerima gaya tarik sebesar $F = 14.000 \text{ N}$, tentukan tegangan geser yang bekerja pada masing-masing penampang baut.



Jawab

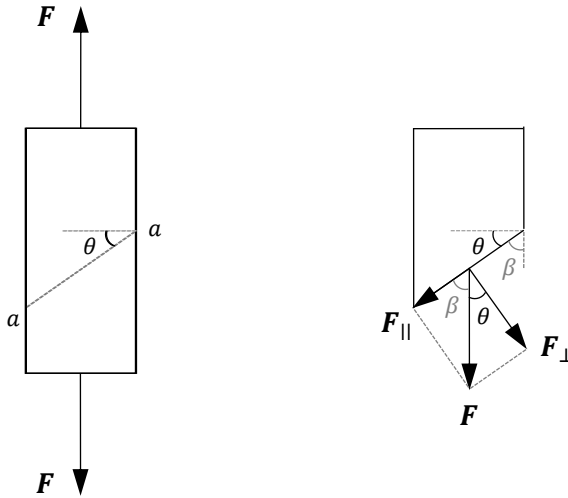
Ketika kedua pelat ditarik, permukaan penampang baut pada bagian yang ditunjukkan pada gambar di atas menerima tegangan geser. Karena gaya tarik F ditahan oleh dua buah baut, masing-masing baut menerima gaya yang sejajar dengan permukaannya sebesar $F/2$. Dengan demikian, tegangan geser yang bekerja pada masing-masing penampang baut dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (1.4), yaitu

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{F_{\parallel}}{A} = \frac{F/2}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{F}{8\pi d^2} \\ &= \frac{14.000 \text{ N}}{8\pi(0,01 \text{ m})^2} \\ &= 5,63 \text{ MPa.} \end{aligned}$$

Sama seperti tegangan normal, satuan tegangan geser adalah Pa atau MPa. Selain itu, tegangan geser juga merupakan besaran skalar.

E. Tegangan pada Bidang Miring Material

Tegangan normal dan tegangan geser dapat terjadi secara bersamaan pada suatu material. Untuk melihat fenomena ini, misalkan sebuah batang dengan luas penampang berbentuk segi empat dengan luas A ditarik dengan gaya sebesar F seperti ditunjukkan pada Gambar 1.5. Pada keadaan demikian, tentu tegangan normal bekerja pada permukaan penampang tersebut. Meskipun batang tersebut mendapat tarikan pada arah normal terhadap penampangnya, ini bukan berarti bahwa tegangan normal merupakan satu-satunya tegangan yang bekerja pada batang tersebut. Sebaliknya, tegangan geser juga bekerja pada batang tersebut.



Gambar 1.5 Sebuah Batang yang Ditarik dengan Gaya Sebesar F

Berdasarkan Gambar 1.5, misalkan F_{\perp} adalah besar komponen gaya F yang tegak lurus dengan bidang $a - a$ dan F_{\parallel} adalah besar komponen gaya F yang sejajar dengan bidang $a - a$. Dengan demikian, dapat dituliskan bahwa

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{F_{\perp}}{F}; \\ F_{\perp} &= F \cos \theta \end{aligned} \tag{1.5}$$

dan

$$\sin \theta = \frac{F_{\parallel}}{F};$$

$$F_{||} = F \sin \theta. \quad (1.6)$$

Karena pada bidang $a - a$ terdapat gaya yang sejajar dan tegak lurus dengan bidang tersebut, ini berarti bahwa tegangan normal dan tegangan geser bekerja pada bidang itu. Untuk menentukan tegangan normal dan tegangan geser yang bekerja, kita dapat memisalkan A' adalah luas bidang $a - a$. Dengan demikian, karena penampang batang pada Gambar 1.5 berbentuk segi empat, dapat dituliskan bahwa

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{A}{A'}; \\ A' &= \frac{A}{\cos \theta}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Berdasarkan persamaan (1.2), (1.5), dan (1.7), tegangan normal pada bidang $a - a$ adalah σ , yaitu

$$\sigma = \frac{F \cos \theta}{A/\cos \theta} = F \cos \theta \frac{\cos \theta}{A}$$

maka

$$\sigma = \frac{F}{A} \cos^2 \theta. \quad (1.8)$$

Kemudian, berdasarkan persamaan (1.4), (1.6), dan (1.7), tegangan geser pada bidang $a - a$ adalah τ , yaitu

$$\tau = \frac{F \sin \theta}{A/\cos \theta} = \frac{F}{A} \sin \theta \cos \theta.$$

Dengan menggunakan persamaan $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$, persamaan di atas dapat juga ditulis sebagai

$$\tau = \frac{F}{2A} \sin 2\theta. \quad (1.9)$$

Berdasarkan persamaan (1.8) dan (1.9), dapat dilihat bahwa meskipun sebuah batang mengalami penarikan seperti ditunjukkan pada Gambar 1.5, batang tersebut tidak hanya menerima tegangan tarik, tetapi juga menerima tegangan geser. Kemudian, berdasarkan persamaan (1.8), karena $\cos(0) = 1$, tegangan normal bernilai maksimum ketika $\theta = 0$. Artinya, tegangan normal maksimum ini bekerja pada permukaan penampang batang dan besarnya adalah F/A . Selain itu, berdasarkan persamaan (1.9), pada bidang dengan $\theta = 0$, tegangan geser bernilai nol. Tentu ini sesuai dengan intuisi kita. Kemudian,

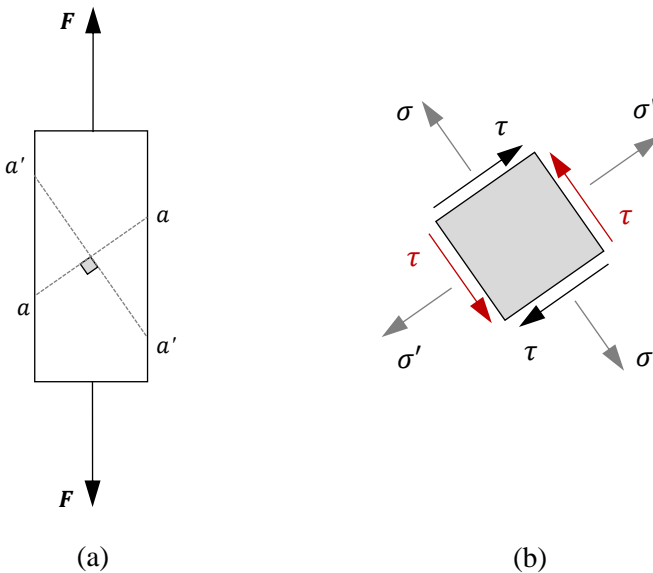
berdasarkan persamaan (1.9), karena $\sin(90^\circ) = 1$, tegangan geser maksimum bekerja pada bidang dengan $\theta = 45^\circ$ dan besarnya adalah $F/2A$.

Sekarang, mari kita tentukan tegangan normal dan tegangan geser yang bekerja pada bidang $a' - a'$, yaitu bidang yang tegak lurus dengan bidang $a - a$ seperti ditunjukkan pada Gambar 1.6a. Untuk menentukan tegangan normal pada bidang ini, θ pada persamaan (1.8) perlu diubah, yaitu menjadi $(\theta + 90^\circ)$ karena bidang ini tegak lurus dengan bidang $a - a$. Dengan demikian, tegangan normal pada bidang $a' - a'$ yang misalkan disimbolkan sebagai σ' dapat ditulis sebagai

$$\sigma' = \frac{F}{A} \cos^2(\theta + 90^\circ).$$

Karena $\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin \theta$,

$$\sigma' = \frac{F}{A} \sin^2 \theta. \tag{1.10}$$



Keterangan: (a) Bidang $a' - a'$ yang Tegak Lurus dengan Bidang $a - a$ dan (b) Tegangan Normal dan Tegangan Geser yang Bekerja pada Elemen Material

Gambar 1.6 Tegangan-Tegangan pada Bidang Elemen Material

Kemudian, tegangan geser pada bidang $a' - a'$ dapat ditentukan dengan mengubah θ pada persamaan (1.9) menjadi $(\theta + 90^\circ)$. Jika tegangan geser pada bidang $a' - a'$ disimbolkan dengan τ' , dapat dituliskan bahwa

$$\tau' = \frac{F}{2A} \sin 2(\theta + 90^\circ).$$

Karena $\sin 2(\theta + 90^\circ) = -\sin 2\theta$,

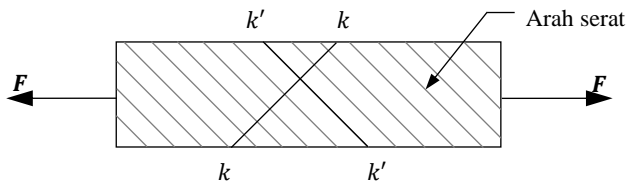
$$\tau' = -\frac{F}{2A} \sin 2\theta. \quad (1.11)$$

Bidang $a' - a'$, atau bidang yang tegak lurus dengan bidang $a - a$, disebut sebagai *bidang komplement* dari bidang $a - a$. Oleh sebab itu, tegangan normal σ' dan tegangan geser τ' juga disebut sebagai *tegangan komplement*.

Tegangan komplement dapat digambarkan dengan cara menggambarkan tegangan tersebut pada elemen material seperti ditunjukkan pada Gambar 1.6b. Dengan membandingkan persamaan (1.9) dan (1.11), dapat dituliskan bahwa

$$\tau' = -\tau. \quad (1.12)$$

Persamaan (1.12) menunjukkan bahwa tegangan geser yang bekerja pada bidang komplement memiliki besar yang sama, tetapi memberikan momen atau torsi pada arah yang berlawanan. Pada Gambar 1.6b, dapat dilihat bahwa tegangan geser yang bekerja pada bidang yang sejajar dengan bidang $a - a$ akan membuat elemen material berotasi pada arah putaran jarum jam, sedangkan tegangan geser komplement, yaitu tegangan geser yang bekerja pada bidang yang sejajar dengan bidang $a' - a'$, akan membuat elemen material berotasi pada arah yang berlawanan dengan putaran jarum jam. Akan tetapi, karena tegangan τ dan τ' memiliki besar yang sama, besar semua tegangan geser yang bekerja pada elemen material dapat ditulis sebagai τ . Meskipun persamaan (1.12) diperoleh dari analisis sebuah batang yang mengalami penarikan, persamaan tersebut sebetulnya tetap berlaku ketika batang pada Gambar 1.5 menerima gaya yang lebih kompleks.



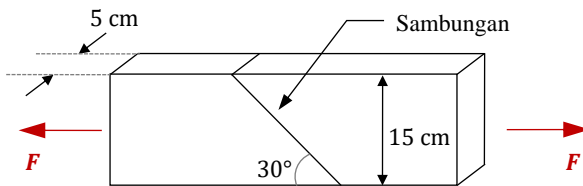
Gambar 1.7 Lamina yang Mengalami Penarikan

Konsep tentang tegangan normal dan tegangan geser yang bekerja secara bersamaan ini nantinya sangat diperlukan dalam melakukan analisis terhadap material komposit yang menerima gaya luar. Gambar 1.7 menunjukkan suatu lamina yang ditarik dengan gaya sebesar F . Arah serat dari lamina tersebut tidak

searah dengan arah tarikan. Nantinya, kita akan menganalisis tegangan tarik yang dialami oleh serat akibat gaya tarik yang searah dengan arah serat. Berdasarkan Gambar 1.7, tegangan ini tentu merupakan tegangan yang bekerja pada bidang $k - k$. Kemudian, kita juga perlu menganalisis tegangan geser yang bekerja pada pada bidang $k' - k'$. Pengetahuan kita tentang tegangan-tegangan yang bekerja tersebut memungkinkan kita untuk mengetahui kapan suatu lamina mengalami kerusakan ketika menerima tarikan.

Contoh 1.3

Dua buah kayu disambungkan dengan menggunakan lem seperti ditunjukkan pada gambar di bawah. Diketahui bahwa lem yang digunakan mampu menahan tegangan normal sebesar 7 MPa dan tegangan geser sebesar 3,5 MPa. Jika kayu yang telah disambungkan tersebut ditarik dengan gaya sebesar $F = 68 \text{ kN}$, tentukan tegangan normal dan tegangan geser yang dialami oleh lem.



Jawab

Berdasarkan persamaan (1.8), tegangan normal yang dialami oleh lem adalah

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{F}{A} \cos^2 \theta \\ &= \frac{(68.000 \text{ N})}{(0,05 \text{ m})(0,15 \text{ m})} \cos^2(45^\circ) \\ &= 6,8 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

Kemudian, berdasarkan persamaan (1.9), tegangan geser yang dialami oleh lem adalah

$$\tau = \frac{F}{2A} \sin 2\theta$$

$$= \frac{(68.000 \text{ N})}{2(0,05 \text{ m})(0,15 \text{ m})} \sin[2(45^\circ)]$$

$$= 3,9 \text{ MPa}.$$

Terlihat bahwa tegangan geser yang dialami lem lebih besar dibandingkan dengan tegangan geser yang mampu ditahan oleh lem. Artinya, sambungan kayu akan lepas akibat tarikan oleh gaya sebesar 68 kN.

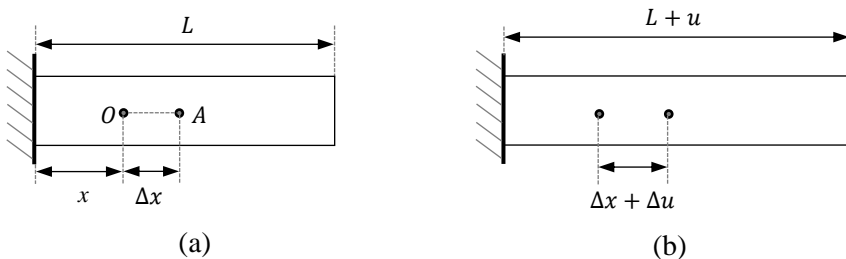
F. Regangan Normal

Ketika suatu material menerima tegangan, material tersebut bisa mengalami deformasi. Sebagai contoh, ketika suatu material menerima tegangan tarik, material tersebut mengalami deformasi berupa pertambahan panjang. Untuk mendeskripsikan deformasi tersebut, didefinisikanlah sebuah konsep baru yang disebut sebagai *regangan*.

Misalkan terdapat sebuah batang dengan panjang L seperti ditunjukkan pada Gambar 1.8a. Kemudian, misalkan batang tersebut mengalami perubahan panjang sebesar u . Perubahan panjang ini dapat disebabkan oleh tarikan yang dialami oleh batang tersebut atau akibat pemuaian yang disebabkan oleh perubahan suhu. *Regangan normal* ε didefinisikan sebagai perubahan panjang per panjang awal, yaitu

$$\varepsilon = \frac{u}{L}. \quad (1.13)$$

Jika deformasi pada batang terjadi secara seragam, regangan ε yang diberikan oleh persamaan (1.13) merupakan nilai regangan yang dialami oleh setiap titik pada batang. Jika deformasi tidak terjadi secara seragam, regangan pada persamaan (1.13) dapat dianggap sebagai regangan rata-rata.



Keterangan: (a) Sebelum Deformasi dan (b) Setelah Deformasi

Gambar 1.8 Sebuah Batang dengan Panjang L yang Mengalami Regangan

Sekarang, mari kita tentukan nilai regangan pada sembarang titik jika deformasi yang terjadi tidak seragam. Untuk itu, berdasarkan Gambar 1.8a, misalkan titik O merupakan titik yang berada pada jarak x dari ujung kiri batang. Kemudian, misalkan panjang garis OA adalah Δx . Jika garis OA mengalami pertambahan panjang sebesar Δu seperti ditunjukkan pada Gambar 1.8b, regangan normal pada titik O didefinisikan sebagai

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

maka

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}. \tag{1.14}$$

Meskipun persamaan (1.14) menunjukkan regangan pada suatu titik, persamaan tersebut tetap sesuai dengan persamaan (1.13). Kalau regangan terjadi secara seragam pada setiap titik, ini berarti bahwa ε bernilai konstan sehingga perubahan panjang yang dialami oleh batang dapat ditentukan dengan mengintegrasikan persamaan (1.14) terhadap x dari 0 sampai L , yaitu

$$\begin{aligned} u &= \int_0^L \varepsilon \, dx = \varepsilon \int_0^L dx \\ &= \varepsilon L \end{aligned}$$

sehingga $\varepsilon = u/L$. Dengan demikian, kita kembali memperoleh persamaan (1.13).

G. Kurva tegangan vs. regangan dan Modulus Young

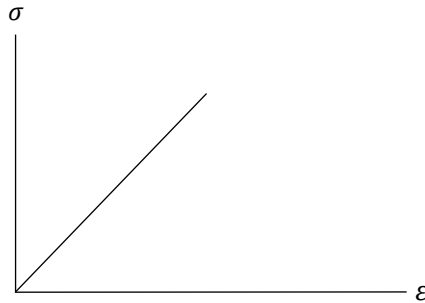
Salah satu cara untuk mengetahui sifat mekanik suatu material adalah dengan cara menarik material tersebut dengan besar gaya tarik tertentu sehingga material tersebut terus mengalami pertambahan panjang dengan laju konstan. Proses ini disebut sebagai proses *uji tarik*. Akibat penarikan, material tersebut mengalami regangan. Hasil pengujian menunjukkan bahwa sampai batas regangan tertentu, besar gaya per satuan luas atau tegangan yang dibutuhkan untuk menarik material tersebut dengan laju konstan berbanding lurus dengan regangan yang dialami oleh material tersebut. Secara matematis, dapat dituliskan bahwa

$$\sigma \sim \varepsilon.$$

Dengan demikian, kita bisa mendefinisikan besaran baru yang misalkan disimbolkan sebagai E sehingga

$$\sigma = \varepsilon E. \quad (1.15)$$

Besaran E ini disebut sebagai *modulus Young*, atau *modulus elastisitas*. Berdasarkan persamaan (1.15), dapat dilihat bahwa modulus Young menunjukkan seberapa elastis suatu material. Makin kecil modulus Young atau modulus elastisitas suatu material, makin kecil juga tegangan yang dibutuhkan untuk menghasilkan regangan ε tertentu.



Gambar 1.9 Kurva Tegangan vs. Regangan

Jika hubungan antara tegangan dan regangan dari suatu material masih berbanding lurus ketika mengalami proses uji tarik, material tersebut dikatakan masih berada dalam *batas proporsional*. Pada batas proporsional ini, dalam bentuk grafik, hubungan antara tegangan dan regangan ditunjukkan oleh Gambar 1.9. Dengan demikian, berdasarkan persamaan (1.15), modulus Young dapat dipikirkan sebagai kemiringan dari grafik tegangan vs. regangan. Setelah melewati batas proporsionalnya, jika material terus ditarik, pada akhirnya material tersebut putus atau tidak mampu lagi menahan tegangan yang diterimanya. Pada keadaan tersebut, material tersebut dikatakan mengalami *kegagalan*.

Contoh 1.4

Berdasarkan Contoh 1.1, misalkan panjang awal dari tabung tersebut adalah 20 cm. Jika setelah menerima tegangan tekan, tabung tersebut mengalami pemendekan sebesar 0,05 cm, tentukan regangan dan modulus Young dari tabung tersebut.

Jawab

Berdasarkan persamaan (1.13), regangan yang dialami oleh tabung adalah

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{u}{L} = \frac{-0,05 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} \\ &= -0,0125.\end{aligned}$$

Tanda minus menunjukkan bahwa tabung mengalami pemendekan. Kemudian, perhatikan bahwa regangan merupakan besaran tanpa satuan karena pertambahan panjang dan panjang awal merupakan besaran yang sama-sama menyatakan ukuran panjang. Namun, kita juga bisa menulis regangan menjadi

$$\varepsilon = -0,0125 \text{ cm/cm}.$$

Selain itu, karena $1 \text{ cm} = 10.000 \mu\text{m}$, kita juga bisa menuliskan bahwa $\varepsilon = -125 \mu\text{m/cm}$. Dengan demikian, arti dari regangan tabung yang bernilai $-0,0125$ adalah setiap 1 cm dari tabung mengalami pemendekan sebesar $0,0125 \text{ cm}$ atau $125 \mu\text{m}$.

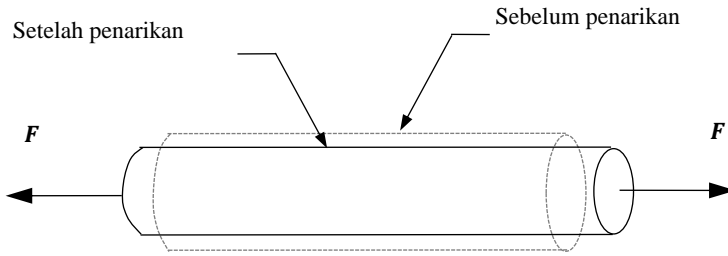
Tegangan yang dialami tabung sudah kita tentukan pada Contoh 1.1, yaitu sebesar $-29.397.354 \text{ Pa}$. Dengan demikian, Modulus Young tabung dapat ditentukan berdasarkan persamaan (1.15), yaitu

$$\begin{aligned}E &= \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{-29.397.354 \text{ Pa}}{-0,0125} \\ &= 2,4 \text{ GPa},\end{aligned}$$

dengan $1 \text{ GPa} = 10^9 \text{ Pa}$.

H. Rasio Poisson

Selain mengalami pertambahan panjang ketika ditarik, ternyata penampang dari suatu material juga mengalami pengecilan seperti ditunjukkan pada Gambar 1.10. Pengecilan ini disebut sebagai *kontraksi lateral*. Dengan kata lain, pengecilan ini menunjukkan adanya regangan pada arah yang tegak lurus dengan arah penarikan. Regangan ini disebut sebagai *regangan lateral*.



Gambar 1.10 Kontraksi Lateral Akibat Penarikan

Simoen D. Poisson menunjukkan bahwa hingga regangan tertentu, rasio regangan lateral dengan regangan pada arah penarikan bernilai konstan. Rasio tersebut disebut sebagai *rasio Poisson* dan biasanya disimbolkan sebagai ν . Rasio Poisson ini dapat dirumuskan sebagai

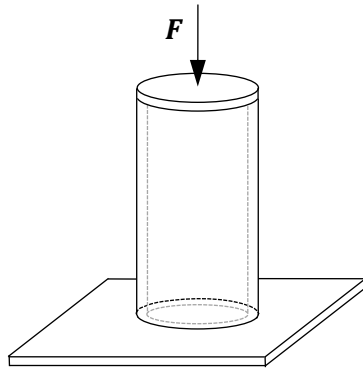
$$\nu = -\frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_x}; \quad (1.16)$$

dengan ε_l dan ε_x secara berturut-turut merupakan regangan lateral dan regangan pada arah penarikan. Tanda minus pada ruas kanan persamaan (1.16) menunjukkan bahwa jika rasio Poisson suatu material bernilai positif ketika suatu material mengalami regangan tarik—dan ini berarti bahwa ε_x bernilai positif—regangan lateral bernilai negatif. Regangan lateral yang bernilai negatif ini menunjukkan bahwa penampang dari material tersebut mengalami pengecilan atau kontraksi lateral.

Contoh 1.5

Sebuah tabung dengan diameter bagian dalam $d_d = 15$ cm dan diameter bagian luar $d_l = 12$ cm ditekan dengan gaya sebesar $F = 630$ kN seperti ditunjukkan pada gambar di bawah. Jika modulus Young dan rasio Poisson dari tabung tersebut secara berturut-turut adalah $E = 200$ GPa dan $\nu = 0,3$, tentukan

- regangan lateral yang dialami tabung,
- perubahan diameter bagian dalam dan diameter bagian luar dari tabung, dan
- perubahan ketebalan tabung.



Jawab

- a) Berdasarkan persamaan (1.16), regangan lateral dapat dirumuskan sebagai

$$\varepsilon_l = -\nu \varepsilon_x.$$

Karena $\varepsilon = \sigma/E$,

$$\varepsilon_l = -\nu \frac{\sigma}{E}.$$

Kemudian, tegangan yang dialami oleh tabung dapat ditentukan seperti yang sudah dilakukan pada Contoh 1.1 sehingga regangan lateral yang dialami oleh tabung adalah

$$\begin{aligned} \varepsilon_l &= -\nu \frac{\frac{-F}{\frac{\pi}{4}(d_l^2 - d_d^2)}}{E} = \nu \frac{4F}{\pi E (d_l^2 - d_d^2)} \\ &= (0,3) \frac{4(630.000 \text{ N})}{\pi(200 \times 10^9 \text{ Pa}) [(0,15 \text{ m})^2 - (0,12 \text{ m})^2]} \\ &= 148,6 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

Tanda minus ditambahkan sebelum F karena gaya F memberikan tegangan tekan. Regangan lateral yang bernilai positif menunjukkan bahwa penampang tabung mengalami pembesaran akibat tegangan tekan tersebut.

- b) Karena regangan adalah pertambahan panjang per panjang awal, dapat dituliskan bahwa $\varepsilon_l = \Delta d_d / d_d$ sehingga perubahan diameter bagian dalam tabung adalah Δd_d , yaitu

$$\begin{aligned}\Delta d_d &= \varepsilon_l d_d = (-148,6 \times 10^{-6})(12 \text{ cm}) \\ &= 0,0018 \text{ cm}.\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, perubahan diameter bagian luar tabung adalah Δd_l , yaitu

$$\begin{aligned}\Delta d_l &= \varepsilon_l d_l = (-148,6 \times 10^{-6})(12 \text{ cm}) \\ &= 0,0022 \text{ cm}.\end{aligned}$$

- c) Karena $\Delta d_l = 0,0022 \text{ cm}$ dan $\Delta d_d = 0,0018 \text{ cm}$, perubahan ketebalan tabung adalah Δk , yaitu

$$\begin{aligned}\Delta k &= \frac{\Delta d_l - \Delta d_d}{2} = \frac{(0,0022 \text{ cm}) - (0,0018 \text{ cm})}{2} \\ &= 0,0002 \text{ cm}.\end{aligned}$$

Ruas kanan pada persamaan tersebut dibagi dua karena $(\Delta d_l - \Delta d_d)$ nilainya sama dengan dua kali ketebalan tabung. Kemudian, perhatikan bahwa ketika tabung ditekan, diameter luar, diameter dalam dan ketebalan tabung membesar.

I. Regangan Geser dan Modulus Geser

Tegangan normal mengakibatkan deformasi yang berupa perubahan panjang pada arah normal, sedangkan tegangan geser dapat mengakibatkan deformasi dalam bentuk lain. Untuk mengetahui bentuk deformasi yang terjadi, mari kita tinjau kembali elemen material yang menerima tegangan geser. Kita sudah membahas bahwa ketika suatu material menerima gaya luar, tegangan geser yang bekerja pada elemen material tersebut ditunjukkan oleh Gambar 1.11a. Berdasarkan gambar tersebut, tegangan geser yang bekerja pada permukaan atas dan bawah menyebabkan kedua permukaan tersebut tidak lagi sejajar. Kemudian, tegangan geser yang bekerja pada permukaan kiri dan kanan juga menyebabkan kedua permukaan tersebut tidak lagi sejajar. Dengan demikian, tegangan geser yang bekerja pada keempat permukaan elemen material menyebabkan elemen material tersebut mengalami deformasi seperti ditunjukkan pada Gambar 1.11b. Pada Gambar 11.b, dapat dilihat bahwa garis

ab berotasi sebesar θ_2 pada arah putaran jarum jam, sedangkan garis cd berotasi sebesar θ_1 pada arah yang berlawanan dengan putaran jarum. Akibatnya, sudut adc dan abc mengecil sebesar γ , sedangkan sudut bad dan bcd membesar sebesar γ .

Regangan geser didefinisikan sebagai sudut γ , yaitu

$$\gamma = \theta_1 + \theta_2. \tag{1.17}$$

Kemudian, perhatikan bahwa untuk sudut yang sangat kecil, $\tan \theta \approx \theta$ sehingga

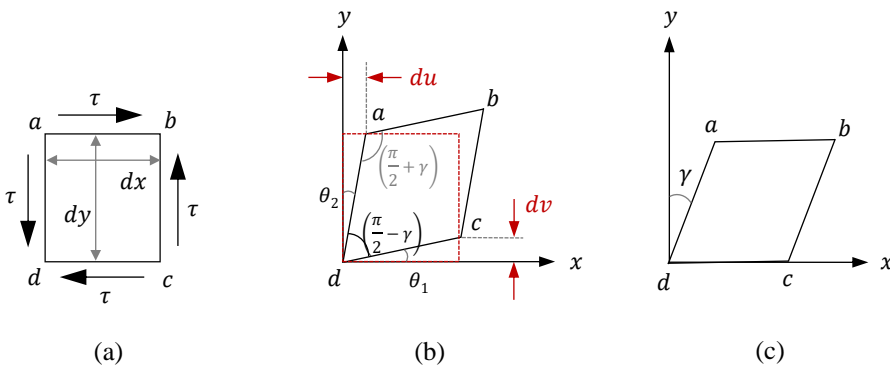
$$\theta_1 = \frac{du}{dy}$$

dan

$$\theta_2 = \frac{dv}{dx}.$$

Dengan demikian, regangan geser juga bisa ditulis sebagai

$$\gamma = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}. \tag{1.18}$$



Keterangan: (a) Tegangan Geser pada Elemen Material, (b) Deformasi Elemen Material Akibat Tegangan Geser, dan (c) Sudut γ yang Menyatakan Regangan Sudut

Gambar 1.11 Tegangan Geser dan Regangan Geser pada Elemen Material

Sama seperti hubungan antara tegangan normal dan regangan normal, hubungan antara tegangan geser dan regangan geser diberikan oleh

$$\tau = G\gamma, \tag{1.19}$$

dengan G disebut sebagai *modulus geser*. Modulus geser ini biasanya juga disebut sebagai *modulus kekakuan*.

Perlu diketahui bahwa terdapat kesepakatan terkait tegangan geser. Jika tegangan geser bekerja pada permukaan positif dan mengarah ke arah positif, tegangan geser tersebut bernilai positif. Sebaliknya, tegangan tersebut bernilai negatif jika ia mengarah ke arah negatif. Permukaan positif maksudnya adalah permukaan yang menghadap ke arah positif, seperti permukaan ab dan bc pada Gambar 1.11. Sementara itu, jika tegangan geser bekerja pada permukaan negatif dan mengarah ke arah negatif, tegangan geser tersebut bernilai positif. Sebaliknya, tegangan tersebut bernilai negatif jika ia mengarah ke arah positif. Dengan demikian, dapat dilihat bahwa tegangan geser yang bekerja pada Gambar 1.11a bernilai positif. Jika tegangan geser yang bekerja bernilai negatif, deformasi yang dihasilkannya tidak seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.11b, tetapi tegangan geser tersebut menyebabkan sudut adc dan abc membesar, sedangkan sudut bad dan bcd mengecil. Berdasarkan persamaan (1.17), karena deformasi yang seperti ini disebabkan oleh tegangan geser yang bernilai negatif, regangan geser yang mendeskripsikan deformasi tersebut juga bernilai negatif.

Contoh 1.6

Misalkan modulus geser dari elemen material pada Gambar 1.11a adalah $G = 45 \text{ GPa}$. Jika regangan geser yang dialami oleh elemen material tersebut adalah $\gamma = 0,002$, tentukan tegangan geser yang bekerja pada sisi-sisi elemen material tersebut.

Jawab

Berdasarkan persamaan (1.17), tegangan geser yang bekerja pada sisi-sisi elemen material pada Gambar 1.11a adalah

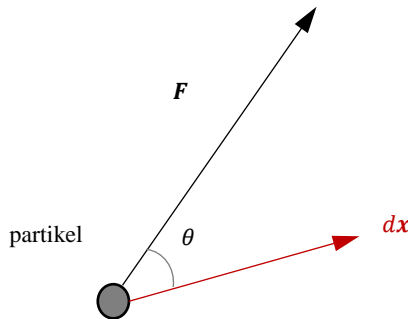
$$\begin{aligned}\tau &= G\gamma = (45 \text{ GPa})(0,002) \\ &= 90 \text{ MPa}.\end{aligned}$$

J. Usaha

Dalam dinamika partikel, kita mengetahui bahwa usaha yang dilakukan oleh gaya total \mathbf{F} ke suatu partikel yang bergerak sejauh dx adalah dW , yaitu

$$dW = F dx \cos \theta, \tag{1.20}$$

dengan θ adalah sudut yang diapit oleh vektor gaya total dan vektor perpindahan.



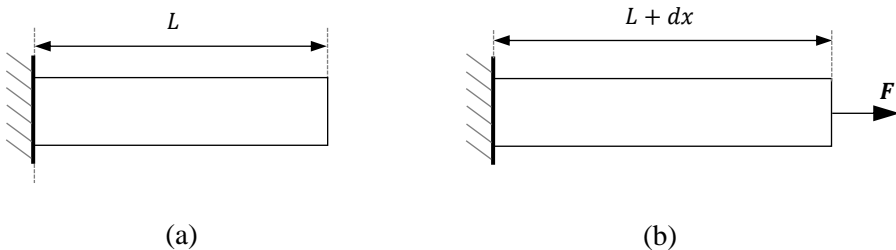
Gambar 1.12 Gaya F yang Bekerja pada Partikel yang Bergerak Sejauh dx

Berdasarkan persamaan (1.20), jika perpindahan sama dengan nol, usaha yang dilakukan oleh gaya total juga sama dengan nol. Dengan demikian, gaya luar bisa dikatakan melakukan usaha ke partikel jika partikel tersebut mengalami perpindahan.

Dalam analisis mekanika material, kita perlu mengembangkan konsep usaha sedemikian rupa sehingga usaha yang dilakukan oleh suatu gaya ke suatu material tidak lagi harus ditandai dengan adanya perpindahan, tetapi bisa ditandai dengan adanya perubahan panjang dari material tersebut. Untuk itu, misalkan sebuah batang ditarik oleh gaya F dan misalkan batang tersebut mengalami perubahan panjang sebesar dx seperti ditunjukkan pada Gambar 1.13a. Dengan demikian, usaha oleh gaya F didefinisikan sebagai dW , yaitu

$$dW = F dx. \tag{1.21}$$

Berbeda dengan rumusan usaha yang kita pelajari di dinamika partikel, dx pada persamaan (1.21) merupakan perubahan panjang.



Gambar 1.13 Perubahan Panjang Batang Akibat Gaya F

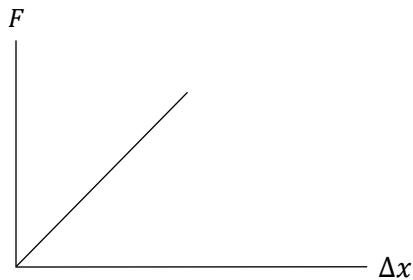
Buku ini tidak diperjualbelikan.

Kita sudah membahas bahwa pada batas proporsional, tegangan dan regangan berbanding lurus. Karena tegangan berbanding lurus dengan gaya dan regangan berbanding lurus dengan perubahan panjang, hubungan antara besar gaya dan perubahan panjang pada proses uji tarik dapat digambarkan seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.14.

Usaha total yang dilakukan oleh gaya F dapat ditentukan dengan mengintegalkan persamaan (1.21). Karena usaha total adalah integral dari persamaan (1.21), ini berarti bahwa usaha total sama dengan luas wilayah di bawah grafik F vs Δx . Dengan demikian, karena wilayah di bawah grafik F vs Δx berbentuk segitiga, usaha total W dapat ditulis sebagai

$$W = \frac{1}{2} F \Delta x, \quad (1.22)$$

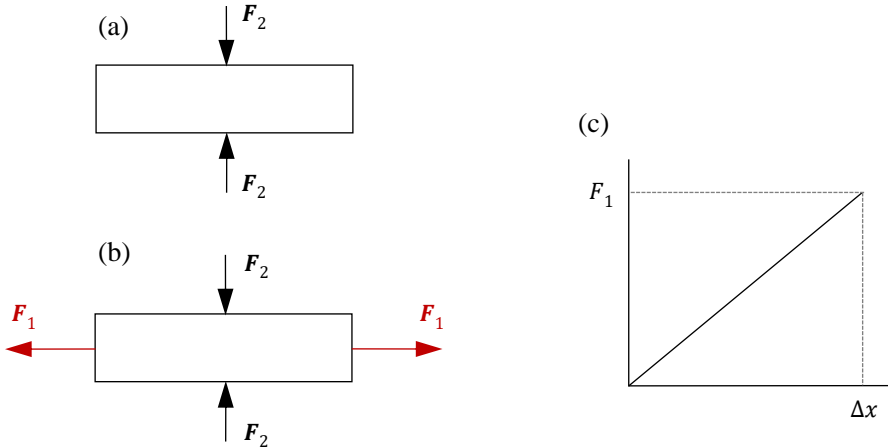
dengan F dan Δx secara berturut-turut merupakan besar gaya maksimum dan perubahan panjang maksimum. Kemudian, perhatikan bahwa persamaan (1.22) hanya berlaku jika hubungan antara gaya dan perubahan panjang adalah seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.14.



Gambar 1.14 Grafik Besar Gaya F vs. Perubahan Panjang Δx

Contoh 1.7

Sebuah batang berada dalam keadaan setimbang setelah menerima gaya F_2 seperti ditunjukkan pada gambar (a) di bawah. Setelah itu, misalkan batang tersebut menerima gaya tambahan F_1 seperti ditunjukkan pada gambar (b). Jika hubungan antara gaya F_1 dan perubahan panjang batang pada arah horizontal ditunjukkan oleh grafik (c), tentukan rumusan usaha yang dilakukan oleh gaya F_1 . Kemudian, gambarkan hubungan antara F_2 dan perubahan panjang batang pada arah vertikal setelah batang menerima gaya F_1 dalam bentuk grafik.

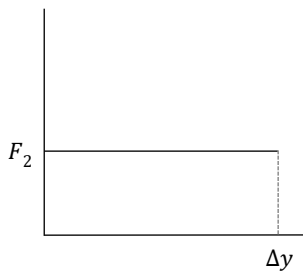


Jawab

- a. Dalam keadaan setimbang artinya adalah batang tidak lagi mengalami perubahan panjang atau perubahan bentuk setelah menerima gaya F_2 . Kemudian, ketika batang ditarik oleh gaya F_1 , berdasarkan persamaan (1.20), usaha yang dilakukan oleh gaya F_1 adalah W_1 , yaitu

$$W_1 = \frac{1}{2} F_1 \Delta x.$$

- b. Berdasarkan gambar (a) dan (b), ketika batang ditarik oleh gaya F_1 , akibat efek Poisson, batang tersebut mengalami perubahan panjang pada arah vertikal. Artinya, gaya F_2 juga melakukan usaha meskipun perubahan panjang tersebut terjadi bukan akibat gaya tersebut. Jika perubahan panjang batang pada arah vertikal adalah Δy , hubungan antara F_2 dan Δy setelah batang menerima gaya F_1 ditunjukkan oleh gambar berikut.



Gambar tersebut menunjukkan bahwa gaya F_2 bernilai konstan. Dengan demikian, karena usaha sama dengan luas wilayah di bawah grafik F_2 vs. Δy , usaha yang dilakukan oleh gaya F_2 adalah W_2 , yaitu

$$W_2 = F_2 \Delta y.$$

Dari contoh ini dapat dilihat bahwa ketika gaya F_2 melakukan usaha, perubahan panjang pada arah vertikal tidak harus disebabkan oleh gaya F_2 . Hal yang sama juga berlaku ketika kita membahas konsep usaha pada dinamika partikel. Ketika kita mengangkat suatu benda vertikal ke atas, meskipun kita yang menyebabkan benda tersebut berpindah, tetapi gaya gravitasi tetap melakukan usaha, yaitu usaha negatif. Konsep yang kita bahas pada contoh ini nantinya kita perlukan untuk membahas suatu teorema yang disebut sebagai teorema Maxwell-Beti. Teorema ini dapat menyederhanakan persamaan tentang hubungan antara tegangan dan regangan pada suatu lamina.

K. Jenis-Jenis Material Komposit yang Lain

Meskipun di bagian awal bab ini kita sudah membahas bahwa sebagian besar material komposit merupakan material komposit dengan matriks polimer dan di buku ini kita akan memfokuskan pembahasan kita ke material komposit dengan matriks polimer dengan serat searah kontinu, sebetulnya terdapat material komposit dengan jenis lain. Ditinjau dari bentuk penguatnya, material komposit ada yang diperkuat oleh serat searah kontinu, serat pendek yang random, dan partikel. Sementara itu, jika ditinjau dari jenis matriksnya, matriks material komposit ada yang terbuat dari polimer, logam, keramik, dan karbon.

Pada material komposit dengan matriks logam, matriks yang digunakan merupakan logam yang memiliki keuletan. Dibandingkan dengan material komposit dengan matriks polimer, material komposit dengan matriks logam dapat digunakan di suhu yang lebih tinggi. Selain itu, penguat pada material komposit dengan matriks logam adalah berupa partikel, serat kontinu, dan serat pendek. Fraksi volume penguat biasanya pada rentang 10%–60%.

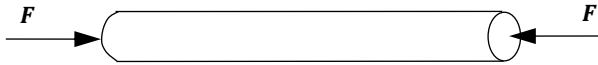
Material komposit dengan matriks keramik memiliki sifat yang kuat, keras, dan tahan terhadap suhu tinggi. Namun, material tersebut memiliki ketangguhan fraktur yang rendah. Ketika menerima tegangan tarik yang tinggi atau hantaman yang cukup besar, material tersebut akan mengalami kegagalan total.

Sementara itu, pada material komposit dengan matriks karbon, penguatnya bisa berupa serat karbon sehingga material tersebut juga disebut sebagai komposit karbon-karbon. Komposit karbon-karbon memiliki modulus Young dan kekuatan tarik yang sangat tinggi. Selain itu, material tersebut tahan terhadap suhu yang sangat tinggi, hingga 2000 °C.

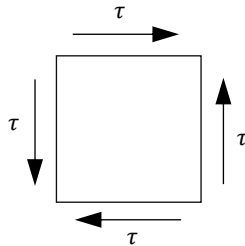
Soal-soal

1. Jelaskan apa yang dimaksud dengan lamina dan laminat.

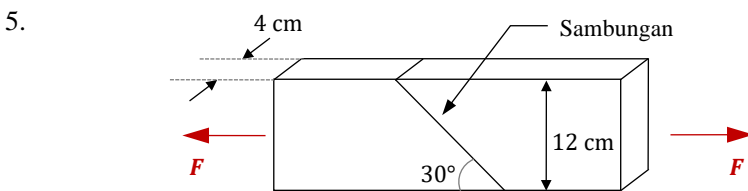
2. Sebuah tabung dengan panjang 450 mm menerima gaya tekan seperti ditunjukkan pada gambar berikut. Diameter bagian dalam dan luar dari tabung tersebut secara berturut-turut adalah $d_d = 55$ mm dan $d_l = 65$ mm. Jika regangan yang dialami oleh tabung tersebut adalah -500×10^{-6} , tentukan perubahan panjang yang dialami oleh tabung tersebut. Kemudian, jika tegangan tekan yang dialami oleh tabung tersebut adalah 45 MPa, tentukan modulus Young dan besar gaya yang tekan yang bekerja pada tabung tersebut.



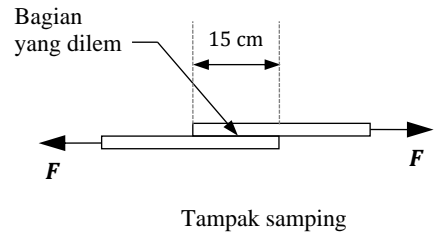
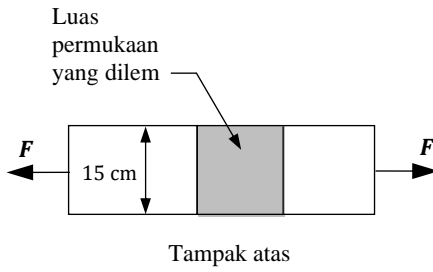
3. Misalkan modulus geser dari elemen material pada gambar berikut adalah $G = 40$ GPa. Jika tegangan geser τ yang bekerja adalah $\tau = 60$ MPa, tentukan regangan geser yang dihasilkan.



4. Dua buah kayu disambungkan dengan menggunakan lem ditarik seperti ditunjukkan pada gambar di bawah. Diketahui bahwa lem yang digunakan mampu menahan tegangan normal sebesar 8 MPa dan tegangan geser sebesar 4 MPa. Tentukan besar gaya tarik maksimum yang mampu ditahan oleh lem tersebut.



6. Jika lem pada soal nomor 4 digunakan untuk menyambungkan dua buah kayu seperti ditunjukkan pada gambar berikut, tentukan besar gaya tarik maksimum yang mampu ditahan oleh lem tersebut.

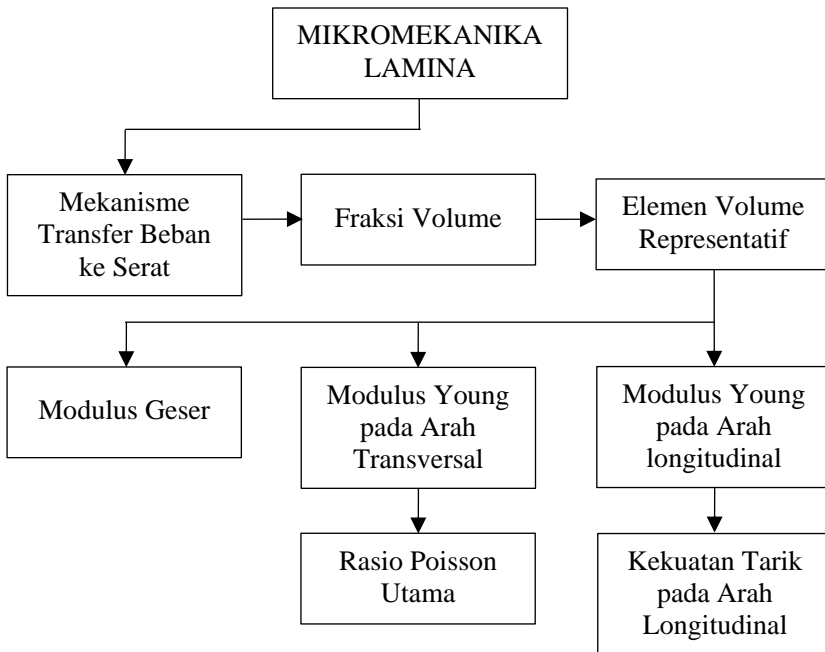


7. Jelaskan jenis-jenis material komposit ditinjau dari material matriksnya.

BAB II

MIKROMEKANIKA LAMINA

Kita sudah membahas bahwa material komposit terdiri dari matriks dan serat. Sifat dari material komposit atau lamina sangat bergantung pada sifat matriks dan serat. Kemudian, kita juga sudah membahas beberapa konsep dasar tentang mekanika material. Pada bab ini, berdasarkan konsep-konsep dasar mekanika material tersebut, kita akan membahas konsep tentang *mikromekanika lamina*. Mikromekanika lamina merupakan ilmu tentang cara menentukan sifat-sifat lamina yang dihasilkan berdasarkan sifat-sifat material penyusunnya. Dengan membahas mikromekanika lamina, kita akan lebih memahami cara serat dan matriks untuk saling mendukung ketika suatu lamina menerima gaya dari luar.



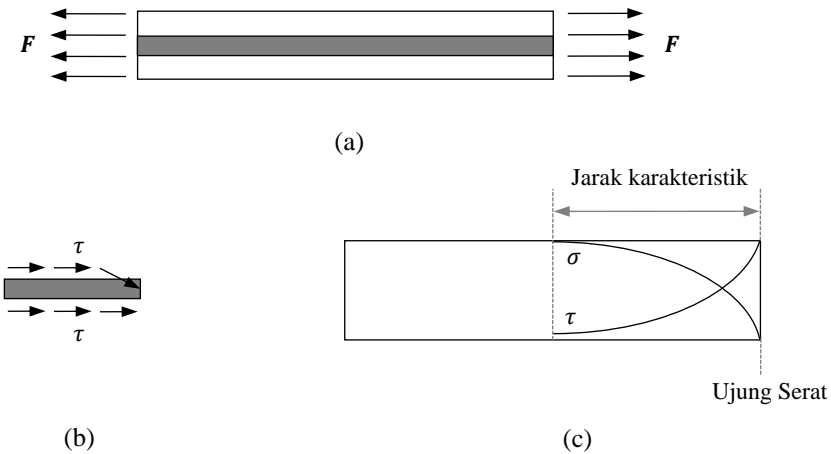
Gambar 2.1 Peta Konsep Bab II

Sebagaimana peta konsep pada Gambar 2.1, pertama, kita akan membahas terlebih dahulu mekanisme transfer beban dari matriks ke serat pada lamina. Kemudian, karena sifat lamina sangat bergantung pada komposisi serat dan matriks, kita akan membahas cara menyatakan komposisi tersebut dengan menggunakan konsep fraksi volume. Setelah itu, berdasarkan konsep-konsep

mekanika material, dengan meninjau elemen volume representatif dari lamina, kita akan menentukan sifat-sifat lamina yang dihasilkan, seperti modulus Young, rasio Poisson, dan kekuatan tarik lamina.

A. Mekanisme Transfer Beban ke Serat

Gaya luar yang bekerja pada sebuah lamina tentu ditopang oleh matriks dan serat lamina tersebut. Dalam analisis mekanika material, besar gaya tersebut juga sering disebut sebagai beban. Karena modulus elastisitas serat lebih besar jika dibandingkan dengan modulus elastisitas matriks, beban total yang diterima lamina sebagian besar ditopang oleh serat, sedangkan matriks menopang beban yang relatif lebih kecil. Artinya, ketika lamina menerima pembebanan, matriks mentransfer sebagian beban yang diterimanya ke serat.



Keterangan: (a) Material Komposit atau Lamina yang Menerima Gaya Tarik F , (b) Beban yang Ditransfer ke Serat oleh Matriks via Tegangan Geser yang Bekerja pada Permukaan Serat, dan (c) Distribusi Tegangan Tarik dan Tegangan Geser yang Bekerja di Sepanjang Serat

Gambar 2.2 Mekanisme Transfer Beban pada Material Komposit (Lamina)

Mekanisme transfer beban pada Lamina ditunjukkan pada Gambar 2.2. Ketika lamina menerima gaya tarik F (Gambar 2.2a), beban yang diterima oleh matriks ditransfer ke serat melalui tegangan geser yang bekerja pada permukaan serat (Gambar 2.2b). Tegangan geser tersebut menyebabkan serat menerima tegangan tarik yang lebih besar. Perlu diketahui bahwa analisis yang lebih lanjut menunjukkan bahwa tegangan geser yang bekerja pada permukaan serat bernilai maksimum di ujung serat. Selain itu, tegangan tarik pada serat bernilai minimum di ujung serat. Setelah jarak tertentu dari ujung serat, yang disebut sebagai *jarak karakteristik*, tegangan geser bernilai sangat kecil dan tegangan

tarik bernilai maksimum. Jarak karakteristik tersebut bernilai sangat kecil sehingga kita bisa mengasumsikan bahwa tegangan tarik bernilai sama di sepanjang serat. Distribusi tegangan geser dan tegangan tarik ini ditunjukkan pada Gambar 2.2c.

Hal yang sama juga terjadi pada saat lamina menerima gaya tekan pada arah longitudinal. Sebagian beban yang diterima oleh matriks ditransfer ke serat melalui tegangan geser sehingga serat menerima tegangan tekan yang lebih besar. Kemudian, perlu diketahui bahwa ketika serat menerima tegangan tekan, serat biasanya lebih mudah mengalami pembengkokan atau tekukan. Akan tetapi, dengan adanya matriks pada lamina, kemungkinan tekukan tersebut dapat dikurangi. Dengan demikian, selain berfungsi untuk mentransfer beban ke serat, matriks juga berfungsi untuk mencegah serat mengalami tekukan.

B. Fraksi Volume

Kita sudah membahas bahwa lamina terdiri dari dua penyusun, yaitu serat dan matriks. Sifat lamina sangat bergantung pada komposisi penyusunnya. Untuk menyatakan komposisi dari penyusun tersebut, terdapat beberapa besaran baru yang perlu didefinisikan, yaitu *fraksi volume serat* dan *fraksi volume matriks*. Kemudian, perlu diketahui bahwa ketika lamina difabrikasi, udara bisa terperangkap di dalamnya. Udara yang terperangkap ini berbentuk gelembung-gelembung kecil dan disebut sebagai *void*. Ukuran dari void ini sangat kecil dan tidak bisa diamati tanpa alat bantu.

Jika volume serat, volume matriks, dan volume void pada suatu lamina berturut-turut disimbolkan sebagai v_s , v_m dan v_v , volume dari lamina atau material komposit yang misalkan disimbolkan sebagai v_k dapat dirumuskan sebagai

$$v_k = v_s + v_m + v_v. \quad (2.1)$$

Fraksi volume serat, yang misalkan disimbolkan sebagai V_s didefinisikan sebagai volume serat per volume lamina. Dengan demikian, dapat dituliskan bahwa

$$V_s = \frac{v_s}{v_k}. \quad (2.2)$$

Dengan cara yang sama, fraksi volume matriks yang misalkan disimbolkan sebagai V_m dan fraksi volume void yang misalkan disimbolkan sebagai V_v secara berturut-turut didefinisikan sebagai

$$V_m = \frac{v_m}{v_k}; \quad (2.3)$$

$$V_v = \frac{v_v}{v_k}. \quad (2.4)$$

Karena $v_k = v_s + v_m + v_v$, dapat dituliskan bahwa

$$V_s + V_m + V_v = \frac{v_s}{v_k} + \frac{v_m}{v_k} + \frac{v_v}{v_k} = 1. \quad (2.5)$$

Perlu diketahui bahwa meskipun dalam analisis mikromekanika lamina, komposisi material penyusun dinyatakan dalam bentuk fraksi volume, tetapi pada praktiknya penentuan fraksi volume tersebut biasanya didasarkan pada hasil pengukuran massa material penyusun. Oleh sebab itu, kita perlu menentukan hubungan antara fraksi volume dan massa dari material penyusun. Untuk itu, karena massa jenis didefinisikan sebagai massa per volume, volume lamina dapat ditulis sebagai

$$v_k = \frac{w_k}{\rho_k}; \quad (2.6)$$

dengan w_k dan ρ_k secara berturut-turut merupakan massa dan massa jenis lamina. Kemudian, dengan cara yang sama, volume serat adalah

$$v_s = \frac{w_s}{\rho_s} \quad (2.7)$$

dan volume matriks adalah

$$v_m = \frac{w_m}{\rho_m}; \quad (2.8)$$

dengan subskrip s dan m secara berturut-turut menyatakan serat dan matriks.

Dengan menyubstitusikan persamaan (2.7) ke persamaan (2.2), fraksi volume serat dapat ditulis sebagai

$$V_s = \frac{w_s}{\rho_s v_k}. \quad (2.9)$$

Berdasarkan persamaan (2.9), jika massa serat, massa jenis serat, dan volume lamina diketahui, fraksi volume serat dapat ditentukan. Kemudian, dengan menyubstitusikan persamaan (2.8) ke persamaan (2.3), fraksi volume matriks dapat ditulis sebagai

$$V_m = \frac{w_m}{\rho_m v_k}. \quad (2.10)$$

Karena lamina terdiri dari serat, matriks dan void, tentu massa lamina tersebut sama dengan penjumlahan massa ketiga elemen penyusun tersebut.

Akan tetapi, karena massa void jauh lebih ringan, ia dapat diabaikan sehingga massa lamina yang misalkan disimbolkan sebagai w_k dapat ditulis sebagai

$$w_k = w_s + w_m; \quad (2.11)$$

dengan w_s dan w_m secara berturut-turut adalah massa serat dan massa matriks. Dengan menyubstitusikan persamaan (2.6), (2.7), dan (2.8) ke persamaan (2.11), diperoleh

$$\begin{aligned} \rho_k v_k &= \rho_s v_s + \rho_m v_m; \\ \rho_k &= \rho_s \frac{v_s}{v_k} + \rho_m \frac{v_m}{v_k}. \end{aligned}$$

Dengan demikian, berdasarkan definisi fraksi volume serat dan fraksi volume matriks, dapat dituliskan bahwa

$$\rho_k = \rho_s V_s + \rho_m V_m. \quad (2.12)$$

Persamaan (2.12) disebut sebagai persamaan *aturan campuran* untuk massa jenis lamina. Berdasarkan persamaan tersebut, jika massa jenis serat, massa jenis matriks, fraksi volume serat, dan fraksi volume matriks diketahui, massa jenis lamina yang dihasilkan dapat ditentukan.

Contoh 2.1

Sebuah sampel lamina dengan ukuran $2,54 \text{ cm} \times 2,54 \text{ cm} \times 0,3 \text{ cm}$ memiliki massa 2,98 gram. Sampel tersebut dimasukkan ke dalam suatu larutan kimia sehingga matriksnya larut kemudian tersisa serat yang massanya sebesar 1,863 gram. Jika diketahui bahwa massa jenis dari serat dan matriks adalah $\rho_s = 1,9 \text{ gram/cm}^3$ dan $\rho_m = 1,2 \text{ gram/cm}^3$, tentukan fraksi volume serat, fraksi volume matriks, dan fraksi volume void pada sampel tersebut.

Jawab

- a. Volume lamina adalah $v_k = 2,54 \text{ cm} \times 2,54 \text{ cm} \times 0,3 \text{ cm} = 1,94 \text{ cm}^3$. Dengan demikian, berdasarkan persamaan (2.9), fraksi volume serat adalah

$$\begin{aligned} V_s &= \frac{w_s}{\rho_s v_k} = \frac{1,863 \text{ gram}}{(1,9 \text{ gram/cm}^3)(1,94 \text{ cm}^3)} \\ &= 50,54\%. \end{aligned}$$

Terlihat bahwa lebih dari setengah volume lamina merupakan volume serat.

- b. Berdasarkan persamaan (2.11), massa matriks adalah $w_m = w_k - w_s$. Dengan menyubstitusikan w_m ke persamaan (2.10), fraksi volume matriks adalah

$$V_m = \frac{w_m}{\rho_m v_k} = \frac{w_k - w_s}{\rho_m v_k} = \frac{2,98 \text{ gram} - 1,863 \text{ gram}}{(1,2 \text{ gram/cm}^3)(1,94 \text{ cm}^3)}$$

$$= 47,98\%.$$

- c. Fraksi volume void dapat ditentukan berdasarkan persamaan (2.5), yaitu

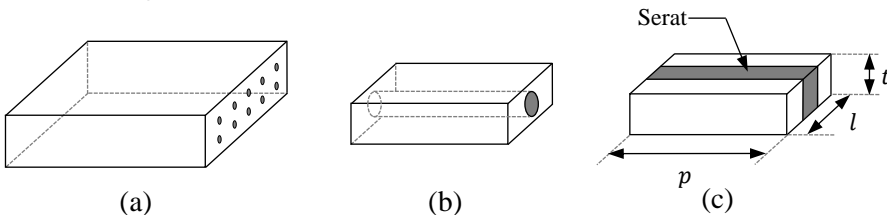
$$V_v = 1 - V_s + V_m = 100\% - 50,54\% + 47,98\%$$

$$= 1,48\%.$$

Pada contoh ini dapat dilihat bahwa massa jenis serat dan massa jenis matriks sudah diketahui terlebih dahulu. Untuk menentukan fraksi volume serat, sebuah sampel lamina diambil dengan ukuran tertentu sehingga massa dan volume lamina tersebut dapat ditentukan. Untuk menentukan massa serat, lamina dimasukkan ke dalam suatu larutan kimia khusus sehingga matriksnya larut dan menyisakan serat. Setelah itu, fraksi volume serat, matriks, dan void dapat ditentukan seperti ditunjukkan pada bagian a, b, dan c.

C. Elemen Volume Representatif

Untuk mengembangkan konsep mikromekanika lamina, kita perlu mengasumsikan bahwa serat tersusun sejajar dan terpisah dengan jarak yang sama antara satu dan lainnya seperti ditunjukkan pada Gambar 2.3a. Selain itu, kita perlu mengasumsikan bahwa lamina tersebut dapat diwakilkan oleh elemen volume lamina seperti ditunjukkan pada Gambar 2.3b. Elemen volume tersebut disebut sebagai *elemen volume representatif*.



Keterangan: (a) Lamina dengan Serat yang Tersusun Sejajar, (b) Elemen Volume Representatif, dan (c) Elemen Volume Representatif yang Disederhanakan

Gambar 2.3 Penyederhanaan Lamina untuk Analisis Konsep Mikromekanika

Untuk menyederhanakan analisis, misalkan elemen volume representatif pada Gambar 2.3b diasumsikan seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.3c. Dimensi elemen volume representatif tersebut adalah $p \times l \times t$. Dengan demikian, jika luas total penampang serat adalah A_s , volume serat adalah $v_s = A_s p$. Kemudian, jika luas total penampang elemen volume representatif adalah A_k , volume elemen volume representatif adalah $v_k = A_k p$ sehingga fraksi volume serat dapat ditulis sebagai

$$V_s = \frac{v_s}{v_k} = \frac{A_s p}{A_k p}$$

maka

$$V_s = \frac{A_s}{A_k}. \quad (2.13)$$

Berdasarkan persamaan (2.13), terlihat bahwa fraksi volume serat sama dengan fraksi luas penampang dari serat tersebut. Dengan cara yang sama, jika luas total permukaan matriks adalah A_m , fraksi volume matriks adalah

$$V_m = \frac{v_m}{v_k} = \frac{A_m p}{A_k p}$$

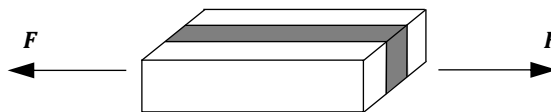
maka

$$V_m = \frac{A_m}{A_k}. \quad (2.14)$$

Rumusan fraksi volume serat dan matriks yang diberikan oleh persamaan (2.13) dan (2.14) kita perlukan untuk merumuskan modulus Young pada arah longitudinal dari suatu lamina berdasarkan konsep mikromekanika lamina.

D. Modulus Young pada arah Longitudinal

Kita sudah membahas bahwa sifat lamina sangat bergantung pada sifat matriks dan serat. Sekarang, mari kita tentukan modulus Young pada arah longitudinal dari lamina jika kita mengetahui komposisi dan modulus Young dari serat dan matriks penyusun lamina tersebut.



Gambar 2.4 Elemen Volume Representatif yang Menerima Gaya pada Arah Longitudinal

Karena elemen volume representatif dapat mewakili lamina, modulus Young pada arah longitudinal dari suatu lamina dapat ditentukan dengan menentukan modulus Young dari elemen volume representatif tersebut. Berdasarkan Gambar 2.4, ketika lamina menerima gaya pada arah longitudinal, gaya total yang bekerja sama dengan penjumlahan gaya yang diterima oleh serat dan matriks. Jika besar gaya yang diterima serat dan matriks secara berturut-turut adalah F_s dan F_m , gaya total yang diterima oleh lamina yang misalkan disimbolkan sebagai F_k adalah

$$F_k = F_s + F_m. \quad (2.15)$$

Karena $\sigma = FA$, persamaan (2.15) juga dapat ditulis sebagai

$$\sigma_{k1}A_k = \sigma_{s1}A_s + \sigma_{m1}A_m; \quad (2.16)$$

dengan σ_{k1} , σ_{s1} dan σ_{m1} secara berturut-turut adalah tegangan yang bekerja pada arah longitudinal dari lamina, serat dan matriks. Kemudian, karena $\sigma = E\varepsilon$, persamaan (2.16) juga dapat ditulis sebagai

$$E_{k1}\varepsilon_{k1}A_k = E_{s1}\varepsilon_{s1}A_f + E_m\varepsilon_{m1}A_m;$$

dengan subskrip 1 menunjukkan arah longitudinal. Kita menuliskan modulus Young matriks menjadi E_m karena pada umumnya, matriks bersifat *isotropik*, yaitu memiliki sifat yang sama pada segala arah. Dengan membagi kedua ruas persamaan di atas dengan $\varepsilon_{k1}A_k$, diperoleh

$$E_{k1} = E_{s1} \frac{\varepsilon_{s1} A_f}{\varepsilon_{k1} A_k} + E_m \frac{\varepsilon_{m1} A_m}{\varepsilon_{k1} A_k}. \quad (2.17)$$

Asumsi lain dalam mikromekanika lamina adalah serat dan matriks terikat dengan sempurna. Dengan demikian, ini berarti ketika lamina mengalami peregangan, $\varepsilon_{k1} = \varepsilon_{f1} = \varepsilon_{m1}$ sehingga $\varepsilon_{s1}/\varepsilon_{k1} = \varepsilon_{m1}/\varepsilon_{k1} = 1$. Kemudian, berdasarkan persamaan (2.13) dan (2.14), persamaan (2.17) dapat ditulis sebagai

$$E_{k1} = E_{s1} (1) \frac{A_f}{A_k} + E_m (1) \frac{A_m}{A_k}$$

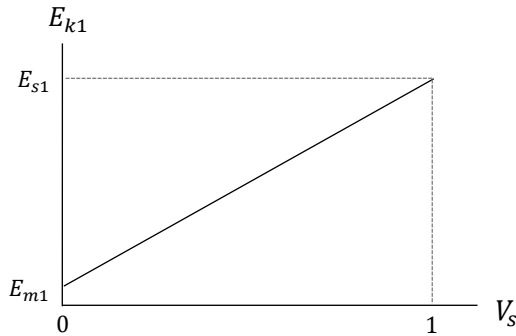
atau

$$E_{k1} = E_{s1}V_f + E_mV_m. \quad (2.18)$$

Asumsi berikutnya dalam mikromekanika lamina adalah void tidak terdapat di dalam lamina. Dengan demikian, persamaan (2.5) dapat ditulis sebagai $V_s + V_m = 1$ sehingga

$$E_{k1} = E_{s1}V_f + E_m(1 - V_f). \quad (2.19)$$

Persamaan di atas disebut sebagai persamaan *aturan campuran* untuk modulus Young lamina pada arah longitudinal. Berdasarkan persamaan tersebut, hubungan antara modulus Young lamina dan fraksi volume serat dapat ditampilkan ke dalam bentuk grafik seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5 Grafik Modulus Young E_{k1} vs. Fraksi Volume Serat V_s

Dari grafik di atas dapat dilihat bahwa modulus Young lamina berbanding lurus dengan fraksi volume serat. Ketika fraksi volume serat sama dengan nol, ini berarti bahwa lamina hanya terdiri dari matriks sehingga modulus Young-nya sama dengan modulus Young matriks. Kemudian, ketika fraksi volume serat sama dengan satu, ini berarti bahwa lamina hanya terdiri dari serat sehingga modulus Young-nya sama dengan modulus Young serat.

Contoh 2.2

Sebuah lamina karbon/epoksi searah tersusun dari serat dan matriks dengan sifat $E_{s1} = 245$ GPa dan $E_m = 4$ GPa. Dengan mengasumsikan lamina tersebut bebas dari void, tentukan modulus Young lamina tersebut pada arah longitudinal jika fraksi volume serat adalah 0,6. Kemudian, jika lamina tersebut ditarik pada arah longitudinal, tentukan rasio beban yang diterima oleh serat dan matriks.

Jawab

- Berdasarkan persamaan (2.19), modulus Young lamina pada arah longitudinal adalah

$$\begin{aligned}
 E_{k1} &= E_{s1}V_f + E_m(1 - V_f) \\
 &= (245 \text{ GPa})(0,6) + (4 \text{ GPa})(1 - 0,6) \\
 &= 148 \text{ GPa}.
 \end{aligned}$$

Terlihat bahwa modulus Young lamina yang dihasilkan lebih besar dari modulus Young matriks, tetapi lebih rendah dari modulus Young serat. Kemudian, karena modulus Young serat jauh lebih besar jika dibandingkan dengan modulus Young matriks, ini menyebabkan modulus Young lamina secara dominan dipengaruhi oleh modulus Young serat.

- b. Karena $F = \sigma A$ dan $\sigma = E\varepsilon$, rasio beban yang diterima oleh serat dan matriks dapat ditulis sebagai

$$\frac{F_s}{F_m} = \frac{E_{s1}\varepsilon_{s1}A_s}{E_m\varepsilon_{m1}A_m}.$$

Kita mengetahui bahwa ketika lamina ditarik pada arah longitudinal, regangan yang dialami oleh matriks dan serat bernilai sama. Dengan demikian, dengan membagi pembilang dan penyebut pada persamaan di atas dengan luas penampang lamina A_k , diperoleh

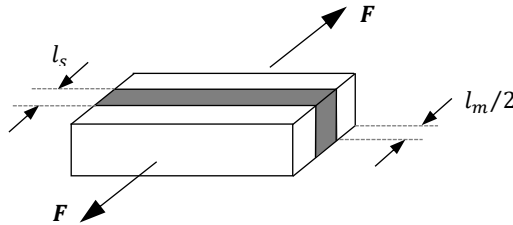
$$\begin{aligned}
 \frac{F_s}{F_m} &= \frac{E_{s1}\varepsilon_{s1}\left(\frac{A_s}{A_k}\right)}{E_m\varepsilon_{m1}\left(\frac{A_m}{A_k}\right)} = \frac{F_s}{F_m} = \frac{E_{s1}V_s}{E_mV_m} \\
 &= \frac{(245 \text{ GPa})(0,6)}{(4 \text{ GPa})(0,4)} \\
 &= 91,88.
 \end{aligned}$$

Ini berarti bahwa beban yang diterima oleh serat adalah 92 kali beban yang diterima oleh matriks. Hal ini disebabkan oleh matriks yang mentransfer bebannya ke serat. Kemudian, perlu diketahui bahwa penamaan lamina karbon/epoksi berarti bahwa lamina tersebut merupakan lamina yang seratnya adalah serat karbon dan matriksnya adalah epoksi.

E. Modulus Young pada arah Transversal

Ketika lamina ditarik pada arah transversal, serat dan matriks mengalami perubahan panjang pada arah tersebut. Dengan demikian, perubahan panjang

total pada arah transversal yang dialami oleh lamina tersebut sama dengan penjumlahan perubahan panjang pada arah transversal dari matriks dan serat.



Gambar 2.6 Elemen Volume Representatif yang Ditarik pada Arah Transversal

Berdasarkan Gambar 2.6, panjang total awal dari serat dan matriks pada arah transversal secara berturut-turut adalah l_s dan l_m . Jika l_k adalah panjang awal lamina pada arah transversal, berdasarkan konsep regangan, dapat dituliskan bahwa

$$\begin{aligned}\Delta l_k &= \Delta l_s + \Delta l_m; \\ \varepsilon_{k2} l_k &= \varepsilon_{s2} l_f + \varepsilon_{m2} l_m;\end{aligned}\tag{2.20}$$

dengan ε_{k2} , ε_{s2} , dan ε_{m2} secara berturut-turut merupakan regangan lamina, regangan serat, dan regangan matriks pada arah transversal. Kemudian, karena $\varepsilon = \sigma/E$, persamaan (2.20) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{k2}}{E_{k2}} l_k &= \frac{\sigma_{s2}}{E_{s2}} l_f + \frac{\sigma_{m2}}{E_m} l_m; \\ \frac{\sigma_{k2}}{E_{k2}} &= \frac{\sigma_{s2}}{E_{s2}} \frac{l_f}{l_k} + \frac{\sigma_{m2}}{E_m} \frac{l_m}{l_k}.\end{aligned}\tag{2.21}$$

Selanjutnya, perhatikan bahwa luas permukaan serat dan matriks yang mengarah ke arah transversal tentu bernilai sama. Ini berarti bahwa ketika lamina ditarik pada arah transversal, tegangan yang dialami oleh serat dan matriks juga bernilai sama sehingga dapat dituliskan bahwa $\sigma_{k2} = \sigma_{f2} = \sigma_{m2}$. Dengan demikian, persamaan (2.21) dapat ditulis sebagai

$$\frac{1}{E_{k2}} = \frac{1}{E_{f2}} \frac{l_f}{l_k} + \frac{1}{E_m} \frac{l_m}{l_k}.\tag{2.22}$$

Selain itu, berdasarkan Gambar 2.3c, perhatikan bahwa

$$\frac{l_s}{l_k} = \frac{l_s t p}{l_k t p} = \frac{v_s}{v_k};$$

$$\frac{l_s}{l_k} = V_s; \quad (2.23)$$

dan

$$\frac{l_m}{l_k} = \frac{l_m t p}{l_k t p} = \frac{v_m}{v_k} = V_m. \quad (2.24)$$

Dengan demikian, persamaan (2.22) dapat ditulis sebagai

$$\frac{1}{E_{k2}} = \frac{V_k}{E_{f2}} + \frac{V_m}{E_m}. \quad (2.25)$$

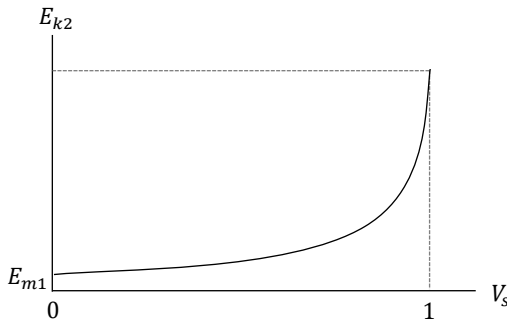
Dengan menyusun ulang persamaan di atas dan mengasumsikan bahwa fraksi volume void sama dengan nol, dapat dituliskan bahwa

$$E_{k2} = \frac{E_{2f} E_m}{E_m V_f + E_{f2} V_m}$$

maka

$$E_{k2} = \frac{E_{2f} E_m}{E_m V_f + E_{f2} (1 - V_f)}. \quad (2.26)$$

Persamaan (2.26) biasanya disebut sebagai persamaan aturan campuran untuk modulus Young lamina pada arah transversal. Berdasarkan persamaan tersebut, dengan E_{2s} yang relatif jauh lebih besar dari E_m , hubungan antara modulus Young lamina pada arah transversal dan fraksi volume serat dapat ditunjukkan dalam bentuk grafik seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.7. Berdasarkan



Gambar 2.7 Grafik Modulus Young E_{k2} vs. Fraksi Volume Serat V_s

gambar tersebut, dapat dilihat bahwa kenaikan modulus Young relatif kecil ketika fraksi volume serat tidak terlalu besar. Ini berarti bahwa modulus Young pada arah transversal sangat bergantung pada modulus Young matriks.

Contoh 2.3

Berdasarkan Contoh 2.2, jika modulus Young serat pada arah transversal adalah $E_{s2} = 25 \text{ GPa}$, tentukan modulus Young lamina tersebut pada arah transversal.

Jawab

Berdasarkan persamaan (2.26), modulus Young lamina pada arah transversal adalah

$$\begin{aligned} E_{k2} &= \frac{E_{2f}E_m}{E_mV_f + E_{f2}(1 - V_f)} \\ &= \frac{(25 \text{ GPa})(4 \text{ GPa})}{(4 \text{ GPa})(0,6) + (25 \text{ GPa})(1 - 0,6)} \\ &= 8,1 \text{ GPa}. \end{aligned}$$

Terlihat bahwa modulus Young lamina yang dihasilkan hampir sama dengan modulus Young serat. Ini berarti bahwa modulus Young lamina pada arah transversal sangat dipengaruhi oleh modulus Young matriks.

F. Rasio Poisson Utama

Pada lamina, rasio Poisson utama didefinisikan sebagai negatif dari rasio regangan pada arah transversal dengan regangan pada arah longitudinal. Dengan demikian, rasio Poisson utama lamina yang misalkan disimbolkan sebagai ν_{k12} dapat dirumuskan sebagai

$$\nu_{k12} = -\frac{\varepsilon_{k2}}{\varepsilon_{k1}}. \quad (2.27)$$

Jika persamaan (2.20) dibagi dengan $l_k \varepsilon_{k1}$, akan diperoleh

$$\frac{\varepsilon_{k2}}{\varepsilon_{k1}} = \frac{\varepsilon_{s2}l_f}{\varepsilon_{k1}l_k} + \frac{\varepsilon_{m2}l_m}{\varepsilon_{k1}l_k}$$

maka

$$\frac{\varepsilon_{k2}}{\varepsilon_{k1}} = \frac{\varepsilon_{s2}}{\varepsilon_{k1}} V_s + \frac{\varepsilon_{m2}}{\varepsilon_{k1}} V_m. \quad (2.28)$$

Kemudian, $\varepsilon_{k1} = \varepsilon_{s1} = \varepsilon_{m1}$ karena serat dan matriks terikat sempurna. Dengan demikian, persamaan (2.28) dapat ditulis sebagai

$$\frac{\varepsilon_{k2}}{\varepsilon_{k1}} = \frac{\varepsilon_{s2}}{\varepsilon_{s1}} V_s + \frac{\varepsilon_{m2}}{\varepsilon_{s1}} V_m. \quad (2.29)$$

Kemudian, jika ν_{s12} dan ν_m secara berturut-turut merupakan rasio Poisson utama dari serat dan matriks, dapat dituliskan bahwa

$$\nu_{s12} = -\frac{\varepsilon_{s2}}{\varepsilon_{s1}}; \quad (2.30)$$

$$\nu_m = -\frac{\varepsilon_{m2}}{\varepsilon_{m1}}. \quad (2.31)$$

Subskrip 12 pada rasio Poisson matriks tidak perlu dituliskan karena matriks bersifat isotropik. Berdasarkan persamaan (2.30) dan (2.31), persamaan (2.29) dapat ditulis sebagai

$$-\frac{\varepsilon_{k2}}{\varepsilon_{k1}} = \nu_{s12} V_s + \nu_m V_m$$

Dengan demikian, rasio Poisson utama yang diberikan oleh persamaan (2.27) juga dapat ditulis sebagai

$$\nu_{k12} = \nu_{s12} V_s + \nu_m V_m. \quad (2.32)$$

Karena $V_m = 1 - V_s$, dapat dituliskan juga bahwa

$$\nu_{k12} = \nu_{s12} V_s + \nu_m (1 - V_s). \quad (2.33)$$

Persamaan (2.33) biasanya disebut sebagai persamaan *aturan campuran* untuk rasio Poisson utama.

Contoh 2.4

Sebuah lamina kaca/epoksi searah memiliki sifat dengan $E_s = 80$ GPa, $\nu_s = 0,2$, $E_m = 4$ GPa dan $\nu_m = 0,3$. Jika fraksi volume serat adalah 0,6, tentukan rasio Poisson lamina tersebut.

Jawab

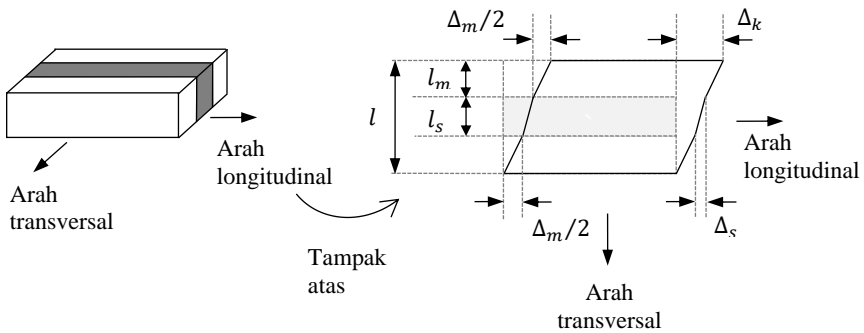
Perlu diketahui bahwa berbeda dengan serat karbon, serat kaca bersifat isotropik sehingga pada serat kaca dapat dituliskan bahwa $E_{s1} = E_{s2}$ dan $\nu_{s12} = \nu_s$. Dengan demikian, berdasarkan persamaan (2.33), rasio Poisson lamina adalah

$$\begin{aligned} \nu_{k12} &= \nu_{s12}V_s + \nu_m(1 - V_s) \\ &= (0,3)(0,6) + 0,3(1 - 0,6) \\ &= 0,24. \end{aligned}$$

Terlihat bahwa karena rasio Poisson lebih kecil dari rasio Poisson matriks, rasio Poisson lamina juga menjadi lebih kecil dari rasio Poisson matriks.

G. Modulus Geser

Gambar 2.8 menunjukkan deformasi yang dialami oleh elemen volume representatif akibat menerima tegangan geser. Tegangan geser tersebut bekerja pada sisi-sisi yang tegak lurus dengan arah transversal dan arah longitudinal. Seperti yang sudah kita bahas pada Bab I, besar tegangan geser pada keempat sisi tersebut bernilai sama.



Gambar 2.8 Deformasi Geser yang Dialami oleh Elemen Volume Representatif

Berdasarkan Gambar 2.8, dapat dilihat bahwa deformasi geser Δ_k sama dengan penjumlahan deformasi geser serat Δ_s dan deformasi geser matriks Δ_m . Dengan demikian, dapat dituliskan bahwa

$$\Delta_k = \Delta_s + \Delta_m. \tag{2.34}$$

Kemudian, misalkan regangan geser yang dialami lamina adalah γ_{k12} . Berdasarkan Gambar 2.8, untuk γ_{k12} yang cukup kecil, dapat dituliskan bahwa

Buku ini tidak diperjualbelikan.

$$\gamma_{k12} = \tan \gamma_{k12}$$

sehingga

$$\gamma_{k12} = \frac{\Delta_k}{l}. \quad (2.35)$$

Dengan demikian,

$$\Delta_k = \gamma_{k12} l. \quad (2.36)$$

Jika tegangan geser dan modulus geser lamina secara berturut-turut adalah τ_{k12} dan G_{k12} , berdasarkan konsep tegangan dan regangan yang sudah kita bahas pada Bab I, kita dapat menuliskan bahwa $\gamma_{k12} = \tau_{k12}/G_{k12}$ sehingga persamaan (2.36) dapat ditulis sebagai

$$\Delta_k = \gamma_{k12} l$$

sehingga

$$\Delta_k = \frac{\tau_{k12}}{G_{k12}} l. \quad (2.37)$$

Dengan cara yang sama, dapat dituliskan bahwa

$$\Delta_s = \gamma_{s12} l_s$$

maka

$$\Delta_s = \frac{\tau_{s12}}{G_{s12}} l_s; \quad (2.38)$$

dengan γ_{s12} , τ_{s12} , dan G_{s12} secara berturut-turut merupakan regangan geser serat, tegangan geser serat, dan modulus geser serat. Kemudian, kita juga bisa menuliskan bahwa

$$\Delta_m = \gamma_{m12} l_m$$

sehingga

$$\Delta_m = \frac{\tau_{m12}}{G_m} l_m; \quad (2.39)$$

dengan γ_{m12} , τ_{m12} , dan G_m secara berturut-turut merupakan regangan geser matriks, tegangan geser matriks, dan modulus geser matriks. Sekali lagi, kita tidak perlu menuliskan subskrip 12 pada modulus geser matriks karena pada umumnya matriks bersifat isotropik. Berdasarkan persamaan (2.37), (2.38), dan (2.39), persamaan (2.34) dapat ditulis sebagai

$$\frac{\tau_{k12}}{G_{k12}} l_k = \frac{\tau_{s12}}{G_{s12}} l_s + \frac{\tau_{m12}}{G_m} l_m.$$

Kemudian, perhatikan bahwa tegangan geser yang dialami oleh lamina, serat, dan matriks bernilai sama sehingga

$$\frac{l_k}{G_{k12}} = \frac{l_s}{G_{s12}} + \frac{l_m}{G_m}.$$

Dengan membagi kedua ruas persamaan tersebut dengan l_k , diperoleh

$$\frac{1}{G_{k12}} \frac{l_k}{l_k} = \frac{1}{G_{s12}} \frac{l_s}{l_k} + \frac{1}{G_m} \frac{l_m}{l_k};$$

$$\frac{1}{G_{k12}} = \frac{V_s}{G_{s12}} + \frac{V_m}{G_m}.$$

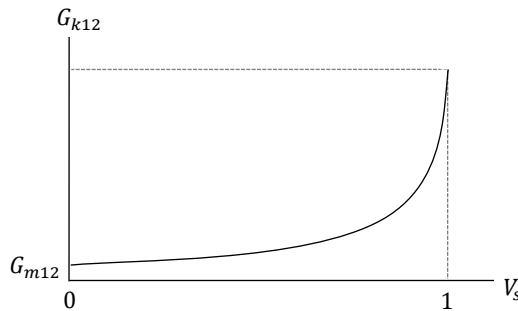
Dengan demikian,

$$G_{k12} = \frac{G_{s12} G_m}{G_m V_s + G_{s12} V_m} \quad (2.40)$$

atau dengan mengasumsikan bahwa lamina bebas dari void, $V_m = (1 - V_s)$ sehingga persamaan (2.40) juga dapat ditulis sebagai

$$G_{k12} = \frac{G_{s12} G_m}{G_m V_s + G_{s12} (1 - V_s)}. \quad (2.41)$$

Persamaan (2.41) mirip dengan rumusan modulus Young pada arah transversal. Ini berarti bahwa modulus geser dari lamina sangat bergantung pada modulus geser matriks. Jika persamaan (2.41) ditampilkan ke dalam bentuk grafik, akan tampak seperti Gambar 2.9.



Gambar 2.9 Grafik Modulus Geser G_{k12} vs. Fraksi Volume Serat V_s

Contoh 2.5

Sebuah lamina kaca/epoksi searah memiliki sifat dengan $G_s = 36 \text{ GPa}$ dan $G_m = 1,5 \text{ GPa}$. Jika fraksi volume serat adalah 0,6, tentukan modulus geser lamina tersebut.

Jawab

Karena serat kaca bersifat isotropik, modulus geser serat tersebut tidak bergantung arah sehingga $G_{s12} = G_s$. Dengan demikian, berdasarkan persamaan (2.41), modulus geser lamina adalah

$$\begin{aligned} G_{k12} &= \frac{G_{12k} G_m}{G_m V_s + G_{s12} (1 - V_s)} \\ &= \frac{(36 \text{ GPa})(1,5 \text{ GPa})}{(1,5 \text{ GPa})(0,6) + (36 \text{ GPa})(1 - 0,6)} \\ &= 3,53 \text{ GPa}. \end{aligned}$$

H. Kekuatan Tarik pada Arah Longitudinal

Untuk menentukan kekuatan tarik lamina pada arah longitudinal, kita bisa mengasumsikan bahwa serat dan matriks bersifat elastik linier sampai mengalami kegagalan. Kegagalan merupakan kondisi di mana lamina sudah rusak dan tidak mampu lagi menerima beban. Ketika lamina ditarik pada arah longitudinal, serat dan matriks mengalami regangan yang sama. Pada umumnya, matriks bersifat lebih elastis dibanding serat. Oleh sebab itu, regangan maksimum yang mampu ditahan matriks lebih besar dibanding regangan maksimum yang mampu ditahan oleh serat. Pada subbab ini, kita akan menentukan kekuatan tarik lamina dengan sifat serat dan matriks yang seperti ini.

Sekarang, mari kita tinjau terlebih dahulu lamina yang hanya terdiri dari matriks saja. Karena tidak ada serat, kekuatan tarik lamina tersebut sama dengan kekuatan tarik matriks. Dengan demikian, pada kondisi ini dapat dituliskan bahwa

$$(\sigma_{k1}^T)_{ult} = (\sigma_m^T)_{ult}; \quad (2.42)$$

dengan $(\sigma_{k1}^T)_{ult}$ dan $(\sigma_m^T)_{ult}$ secara berturut-turut merupakan kekuatan tarik lamina pada arah longitudinal dan kekuatan tarik matriks.

Kita sudah membahas bahwa jika pada lamina terdapat serat, tegangan lamina dapat dirumuskan berdasarkan persamaan (2.16), yaitu

$$\sigma_{k1} A_k = \sigma_{s1} A_s + \sigma_{m1} A_m = \sigma_{s1} \frac{A_s}{A_k} + \sigma_{m1} \frac{A_m}{A_k};$$

$$\sigma_{k1} = \sigma_{s1} V_s + \sigma_{m1} V_m$$

atau

$$\sigma_{k1} = \sigma_{s1} V_s + \sigma_{m1} (1 - V_s). \quad (2.43)$$

Persamaan (2.43) biasanya disebut sebagai persamaan aturan campuran untuk tegangan lamina pada arah longitudinal.

Jika fraksi volume serat sangat kecil, lamina akan masih bersifat cukup elastis. Akibatnya, ketika lamina ditarik, regangan yang dialami oleh lamina cukup besar sehingga serat menjadi lebih cepat mengalami kegagalan karena regangannya sudah mencapai regangan maksimum yang mampu ditahannya. Ketika serat mengalami kegagalan, tentu serat tidak berfungsi. Akan tetapi, ini bukan berarti lamina sudah mengalami kegagalan total. Serat yang mengalami kegagalan tidak lagi memberikan kontribusi dalam menerima beban lamina sehingga kekuatan tarik lamina dapat ditentukan dengan menjadikan suku pertama pada ruas kanan persamaan (2.43) menjadi sama dengan nol, yaitu

$$\left(\sigma_{k1}^T\right)_{ult} = \left(\sigma_m^T\right)_{ult} (1 - V_s). \quad (2.44)$$

Persamaan (2.44) berlaku jika fraksi volume serat sangat kecil. Berdasarkan persamaan tersebut, jika fraksi volume serat tidak cukup besar, penambahan serat justru menyebabkan kekuatan tarik lamina lebih kecil jika dibandingkan dengan kekuatan tarik matriks. Rentang nilai fraksi volume serat ketika persamaan (2.44) berlaku akan kita tentukan nanti.

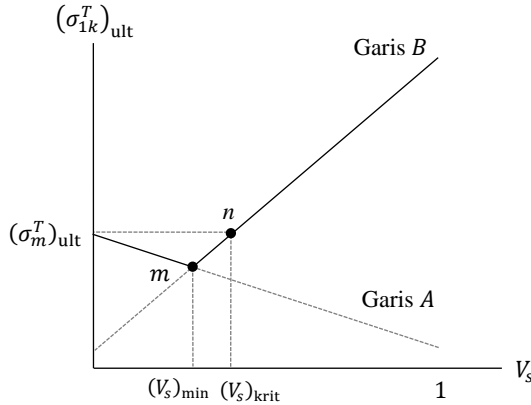
Jika komposisi serat cukup besar, lamina tidak akan terlalu elastis. Dengan demikian, kegagalan lamina terjadi langsung ketika serat mengalami kegagalan. Pada keadaan tersebut, regangan yang dialami matriks sama dengan regangan maksimum yang mampu ditahan oleh serat. Jika regangan maksimum yang mampu ditahan oleh serat adalah $(\varepsilon_{s1}^T)_{ult}$, tegangan yang dialami matriks (σ_{m1}^T) pada keadaan tersebut dapat dirumuskan sebagai

$$\left(\sigma_{m1}^T\right) = \left(\varepsilon_{s1}^T\right)_{ult} E_m. \quad (2.45)$$

Pada keadaan tersebut, tentu tegangan yang dialami oleh serat adalah tegangan tarik yang nilainya sama dengan kekuatannya. Dengan demikian, berdasarkan persamaan (2.43) dan (2.45), kekuatan tarik lamina pada arah longitudinal adalah

$$\left(\sigma_{k1}^T\right)_{\text{ult}} = \left(\sigma_{s1}^T\right)_{\text{ult}} V_s + \left(\varepsilon_{s1}^T\right)_{\text{ult}} E_m (1 - V_s). \quad (2.46)$$

Persamaan di atas berlaku jika fraksi volume serat bernilai cukup besar. Rentang nilai fraksi volume serat ketika persamaan (2.46) berlaku akan kita tentukan setelah ini.



Gambar 2.10 Grafik Modulus Geser G_{k12} vs. Fraksi Volume Serat V_s

Berdasarkan Gambar 2.10, jika persamaan (2.44) ditampilkan ke dalam grafik $(\sigma_{k1}^T)_{\text{ult}}$ vs. V_s , akan tampak plot seperti yang ditunjukkan oleh garis A. Kemudian, jika persamaan (2.46) ditampilkan ke dalam grafik $(\sigma_{k1}^T)_{\text{ult}}$ vs. V_s , akan tampak plot seperti yang ditunjukkan oleh garis B. Berdasarkan Gambar 2.10, jika fraksi volume serat di bawah fraksi volume serat minimum atau $(V_s)_{\text{min}}$, adanya serat justru menyebabkan kekuatan tarik lamina lebih kecil jika dibandingkan dengan kekuatan tarik matriks. Artinya, pada kondisi ini, kekuatan tarik lamina dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (2.44). Sementara itu, jika fraksi volume serat di atas $(V_s)_{\text{min}}$, kekuatan tarik lamina dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (2.46). Akan tetapi, perhatikan bahwa kekuatan tarik lamina baru akan lebih besar daripada kekuatan tarik matriks jika fraksi volume serat di atas fraksi volume kritis $(V_s)_{\text{krit}}$.

Sekarang, mari kita tentukan fraksi volume minimum serat. Berdasarkan Gambar 2.10, fraksi volume minimum dapat ditentukan dengan menyamakan persamaan (2.44) dan (2.46), yaitu

$$\left(\sigma_m^T\right)_{\text{ult}} \left[1 - (V_s)_{\text{min}}\right] = \left(\sigma_{s1}^T\right)_{\text{ult}} (V_s)_{\text{min}} + \left(\varepsilon_{s1}^T\right)_{\text{ult}} E_m \left[1 - (V_s)_{\text{min}}\right];$$

$$(\sigma_m^T)_{ult} - (\sigma_m^T)_{ult}(V_s)_{min} = \left(\sigma_{s1}^T\right)_{ult} (V_s)_{min} + \left(\varepsilon_{s1}^T\right)_{ult} E_m - \left(\varepsilon_{s1}^T\right)_{ult} E_m (V_s)_{min}.$$

Dengan memindahkan suku yang mengandung $(V_s)_{min}$ ke ruas kiri,

$$\left(\varepsilon_{s1}^T\right)_{ult} E_m (V_s)_{min} - (\sigma_m^T)_{ult}(V_s)_{min} - \left(\sigma_{s1}^T\right)_{ult} (V_s)_{min} = \left(\varepsilon_{s1}^T\right)_{ult} E_m - (\sigma_m^T)_{ult};$$

$$(V_s)_{min} \left[\left(\varepsilon_{s1}^T\right)_{ult} E_m - (\sigma_m^T)_{ult} - \left(\sigma_{s1}^T\right)_{ult} \right] = \left(\varepsilon_{s1}^T\right)_{ult} E_m - (\sigma_m^T)_{ult}.$$

Dengan demikian, fraksi volume minimum serat adalah

$$(V_s)_{min} = \frac{\left(\varepsilon_{s1}^T\right)_{ult} E_m - (\sigma_m^T)_{ult}}{\left(\varepsilon_{s1}^T\right)_{ult} E_m - (\sigma_m^T)_{ult} - \left(\sigma_{s1}^T\right)_{ult}}. \quad (2.47)$$

Kemudian, berdasarkan Gambar 2.11, dapat dilihat bahwa ketika fraksi volume serat sama dengan fraksi volume kritis, kekuatan tarik lamina bernilai sama dengan kekuatan tarik matriks. Dengan demikian, fraksi volume kritis dapat ditentukan dengan menjadikan ruas kanan persamaan (2.46) menjadi sama dengan kekuatan tarik lamina, yaitu

$$\begin{aligned} (\sigma_{m1}^T)_{ult} &= \left(\sigma_{s1}^T\right)_{ult} (V_s)_{krit} + \left(\varepsilon_{s1}^T\right)_{ult} E_m \left[1 - (V_s)_{krit}\right] \\ &= \left(\sigma_{s1}^T\right)_{ult} (V_s)_{krit} + \left(\varepsilon_{s1}^T\right)_{ult} E_m - \left(\varepsilon_{s1}^T\right)_{ult} E_m (V_s)_{krit}. \end{aligned}$$

Dengan memindahkan suku yang mengandung volume kritis ke ruas kiri,

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon_{s1}^T\right)_{ult} E_m (V_s)_{krit} - \left(\sigma_{s1}^T\right)_{ult} (V_s)_{krit} &= \left(\varepsilon_{s1}^T\right)_{ult} E_m - (\sigma_{m1}^T)_{ult}; \\ (V_s)_{krit} \left[\left(\varepsilon_{s1}^T\right)_{ult} E_m - \left(\sigma_{s1}^T\right)_{ult} \right] &= \left(\varepsilon_{s1}^T\right)_{ult} E_m - (\sigma_{m1}^T)_{ult}. \end{aligned}$$

Dengan demikian, fraksi volume kritis adalah

$$(V_s)_{krit} = \frac{\left(\varepsilon_{s1}^T\right)_{ult} E_m - (\sigma_{m1}^T)_{ult}}{\left(\varepsilon_{s1}^T\right)_{ult} E_m - \left(\sigma_{s1}^T\right)_{ult}}. \quad (2.48)$$

Contoh 2.6

Sebuah lamina karbon/epoksi serah memiliki sifat dengan $E_{s1} = 380$ GPa, $(\sigma_{s1}^T)_{ult} = 3.000$ MPa, $E_m = 4$ GPa, dan $(\sigma_{m1}^T)_{ult} = 75$ MPa. Tentukan fraksi volume minimum, fraksi volume kritis, dan kekuatan tarik lamina ketika fraksi volume seratnya sama dengan fraksi volume minimum dan kritis.

Jawab

- a) Pertama, kita perlu menentukan regangan maksimum yang mampu ditahan oleh serat dan matriks. Regangan maksimum matriks adalah

$$\begin{aligned}(\varepsilon_{1m}^T)_{ult} &= \frac{(\sigma_{m1}^T)_{ult}}{E_m} = \frac{75 \times 10^{-3} \text{ GPa}}{4 \text{ GPa}} \\ &= 1,875 \times 10^{-2}\end{aligned}$$

dan regangan maksimum serat adalah

$$\begin{aligned}(\varepsilon_{1s}^T)_{ult} &= \frac{(\sigma_{s1}^T)_{ult}}{E_{s1}} = \frac{3 \text{ GPa}}{380 \text{ GPa}} \\ &= 7,89 \times 10^{-3}.\end{aligned}$$

Karena regangan maksimum serat lebih kecil, ini berarti bahwa serat gagal terlebih dahulu sehingga volume serat minimum dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (2.47). Dengan demikian, fraksi volume minimum serat adalah

$$\begin{aligned}(V_s)_{min} &= \frac{(\varepsilon_{s1}^T)_{ult} E_m - (\sigma_m^T)_{ult}}{(\varepsilon_{s1}^T)_{ult} E_m - (\sigma_m^T)_{ult} - (\sigma_{s1}^T)_{ult}} \\ &= \frac{(7,89 \times 10^{-3})(4 \text{ GPa}) - (3 \text{ GPa})}{(7,89 \times 10^{-3})(4 \text{ GPa}) - (75 \times 10^{-3} \text{ GPa}) - (4 \text{ GPa})} \\ &= 0,0143.\end{aligned}$$

Jika fraksi volume serat di bawah 0,0143, penambahan serat justru memperlemah lamina.

- b) Fraksi volume kritis dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (2.48), yaitu

$$\begin{aligned} (V_s)_{\text{krit}} &= \frac{(\varepsilon_{s1}^T)_{\text{ult}} E_m - (\sigma_{m1}^T)_{\text{ult}}}{(\varepsilon_{s1}^T)_{\text{ult}} E_m - (\sigma_{s1}^T)_{\text{ult}}} \\ &= \frac{(7,89 \times 10^{-3})(4 \text{ GPa}) - (75 \times 10^{-3} \text{ GPa})}{(7,89 \times 10^{-3})(4 \text{ GPa}) - (3 \text{ GPa})} \\ &= 0,0146. \end{aligned}$$

- c) Ketika fraksi volume serat sama dengan fraksi volume kritis, kekuatan tarik lamina sama dengan kekuatan tarik matriks, yaitu $(\sigma_m^T)_{\text{ult}} = 75 \text{ MPa}$.
- d) Karena fraksi serat sama dengan fraksi volume minimum, kekuatan tarik lamina dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (2.44) atau (2.46). Dengan demikian,

$$\begin{aligned} (\sigma_{1k}^T)_{\text{ult}} &= (\sigma_m^T)_{\text{ult}} V_s(1 - V_s) \\ &= (75 \times 10^{-3} \text{ GPa}) (0,0143)(1 - 0,0143) \\ &= 1,06 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

Terlihat bahwa kuat tarik lamina lebih kecil daripada kekuatan tarik matriks. Selain itu, perlu diingat bahwa kita membahas mikromekanika lamina ini untuk memahami bagaimana keterkaitan antara serat dan matriks pada suatu lamina. Penentuan kekuatan lamina sangat disarankan dilakukan dengan cara eksperimen seperti yang akan kita bahas pada Bab IX.

Soal-soal

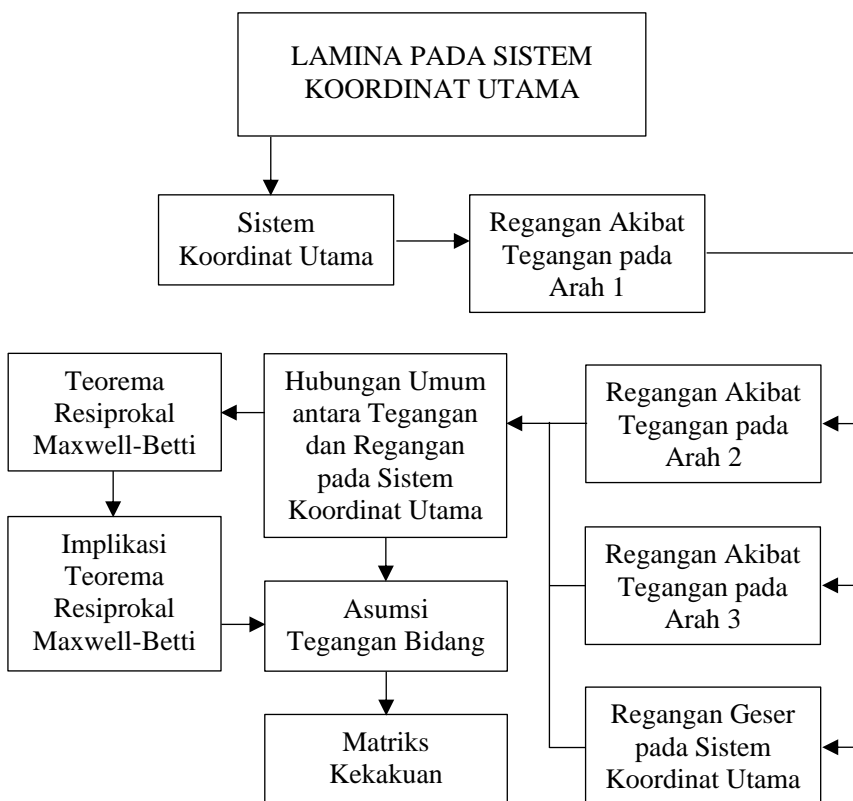
1. Sebuah sampel lamina dengan ukuran $3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} \times 0,3 \text{ cm}$ memiliki massa sebesar 3,10 gram. Sampel tersebut dimasukkan ke dalam suatu larutan kimia sehingga matriksnya larut dan tersisa serat yang massanya sebesar 1,92 gram. Jika diketahui bahwa massa jenis dari serat dan matriks adalah $\rho_s = 1,9 \text{ gram/cm}^3$ dan $\rho_m = 1,2 \text{ gram/cm}^3$, tentukan fraksi volume serat, fraksi volume matriks, dan fraksi volume void pada sampel tersebut.

2. Sebuah lamina karbon/epoksi searah tersusun dari serat dan matriks dengan sifat $E_{s1} = 255$ GPa dan $E_m = 4,5$ GPa. Dengan mengasumsikan lamina tersebut bebas dari void, tentukan modulus Young lamina tersebut pada arah longitudinal jika fraksi volume serat adalah 0,6. Kemudian, jika lamina tersebut ditarik pada arah longitudinal, tentukan rasio beban yang diterima oleh serat dan matriks.
 3. Jelaskan, apakah memungkinkan untuk membuat lamina karbon/epoksi yang memiliki modulus Young pada arah longitudinal sama dengan $E_{k1} = 260$ GPa dan $E_{k2} = 8$ GPa jika modulus Young serat karbonnya adalah $E_{s1} = 250$ GPa.
 4. Sebuah lamina kaca/epoksi searah memiliki sifat dengan $G_s = 36$ GPa dan $G_m = 1,5$ GPa. Jika fraksi volume serat adalah 0,55, tentukan modulus geser lamina tersebut.
 5. Sebuah lamina searah dan memiliki luas penampang sebesar 960 mm². Akibat gaya tarik dari luar pada arah longitudinal, serat dari lamina tersebut menerima tegangan sebesar 215 MPa dan matriksnya menerima tegangan sebesar $5,4$ MPa. Jika besar gaya yang bekerja pada serat adalah 77 kN dan regangan pada arah longitudinal yang dialami oleh lamina adalah $1,5 \times 10^{-3}$, tentukan besar gaya yang bekerja pada matriks, modulus young dari serat, matriks dan lamina pada arah longitudinal.
-

BAB III

LAMINA PADA SISTEM KOORDINAT UTAMA

Kita sudah membahas bahwa laminat terdiri dari beberapa lapis lamina. Untuk menganalisis respons laminat terhadap gaya dari luar, kita perlu terlebih dahulu mempelajari respons sebuah lamina ketika menerima gaya dari luar. Konsep mikromekanika lamina yang sudah kita bahas pada Bab I sebetulnya akan menjadi sangat rumit jika kita jadikan sebagai dasar untuk menganalisis suatu laminat karena kita perlu meninjau interaksi antara serat dan matriks. Cara lain yang lebih efektif adalah dengan cara mengasumsikan bahwa lamina berupa material homogen dan respons lamina terhadap gaya luar dianalisis dalam skala makro. Konsep ini kita sebut sebagai konsep *makromekanika lamina*.

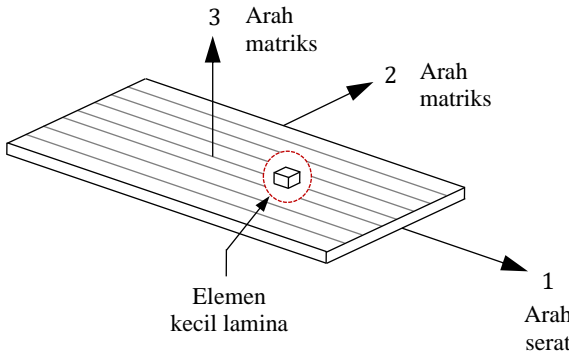


Gambar 3.1 Peta Konsep Bab III

Pada bab ini, kita akan mulai pembahasan tentang konsep makromekanika lamina. Sebagaimana peta konsep pada Gambar 3.1, kita akan membahas terlebih dahulu konsep tentang sistem koordinat utama. Kemudian, kita akan membahas hubungan antara tegangan dan regangan pada arah setiap sumbu dari sistem koordinat utama tersebut, baik tegangan normal dan regangan normal maupun tegangan geser dan regangan geser. Setelah itu, kita juga akan membahas sebuah asumsi yang disebut sebagai asumsi tegangan bidang. Asumsi ini sangat penting dan memudahkan kita nantinya dalam menganalisis laminat.

A. Sistem Koordinat Utama

Untuk mengembangkan konsep tentang makromekanika lamina, terlebih dahulu kita perlu untuk mendefinisikan sebuah sistem koordinat seperti ditunjukkan pada Gambar 3.2. Arah yang searah dengan arah serat disebut sebagai arah 1, atau arah serat. Sementara itu, arah transversal seperti yang sudah kita bahas pada Bab II, juga disebut sebagai arah 2 atau arah matriks. Arah 3 juga disebut sebagai arah matriks, yaitu arah yang tegak lurus dengan bidang lamina. Pada bab ini, kita akan menganalisis respons lamina ketika menerima tegangan akibat gaya yang sejajar dengan arah 1, arah 2, dan arah 3 dengan cara meninjau elemen kecil dari lamina seperti ditunjukkan pada Gambar 3.2.



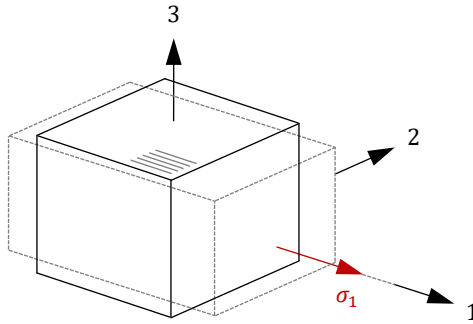
Gambar 3.2 Sistem Koordinat Utama

Sama halnya dengan sistem koordinat Cartesius yang lain, hubungan antara arah 1, 2, dan 3 dapat ditentukan dengan menggunakan aturan tangan kanan. Jika vektor yang mengarah ke arah 1 dikalikan silang dengan vektor yang mengarah ke arah 2, vektor hasil perkalian silang tersebut mengarah ke arah 3. Karena lamina memiliki serat searah, dapat dikatakan bahwa sifatnya

berbeda pada arah 1, 2, dan 3. Material dengan sifat yang seperti itu disebut sebagai material yang bersifat ortotropik.

B. Regangan Akibat Tegangan pada Arah 1

Ketika suatu lamina menerima gaya dari luar, karena sifat elastis yang dimilikinya, lamina tersebut mengalami regangan. Untuk melihat respons lamina tersebut, kita akan meninjau elemen lamina seperti ditunjukkan pada Gambar 3.3. Pertama, kita akan menentukan terlebih dahulu regangan yang dialami oleh elemen lamina jika menerima tegangan akibat gaya luar yang bekerja pada arah yang sejajar dengan arah 1. Tegangan itu kita sebut sebagai tegangan pada arah 1. Akan tetapi, ingat, sebetulnya tegangan bukanlah besaran vektor.



Gambar 3.3 Tegangan pada arah 1 menyebabkan regangan pada arah 1, 2, dan 3.

Ketika tegangan pada arah 1 bekerja, ini menyebabkan terjadinya regangan pada arah 1. Selain itu, karena efek Poisson, regangan juga terjadi pada arah 2 dan 3. Sekarang, mari kita tentukan regangan yang terjadi pada ketiga arah tersebut. Karena $\varepsilon = \sigma/E$, regangan pada arah 1 adalah ε_1 , yaitu

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1}. \quad (3.1)$$

Besaran σ_1 dan E_1 secara berturut-turut merupakan tegangan pada arah 1 dan modulus Young pada arah 1.

Untuk menentukan regangan pada arah 2, yaitu ε_2 , perhatikan bahwa rasio Poisson ν_{12} dapat ditulis sebagai

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}; \quad (3.2)$$

dengan subskrip 12 menunjukkan efek Poisson pada arah 2 akibat tegangan pada arah 1. Berdasarkan persamaan (3.2), ε_2 dapat ditulis sebagai

$$\varepsilon_2 = -\varepsilon_1 \nu_{12}. \quad (3.3)$$

Kemudian, dengan menyubstitusikan persamaan (3.1) ke persamaan (3.3), regangan ε_2 dapat ditulis sebagai

$$\varepsilon_2 = -\nu_{12} \frac{\sigma_1}{E_1}. \quad (3.4)$$

Persamaan (3.4) menunjukkan regangan pada arah 2 yang disebabkan oleh tegangan pada arah 1. Selanjutnya, dengan cara yang sama, regangan pada arah 3, yaitu ε_3 , dapat ditentukan berdasarkan rumusan rasio Poisson ν_{13} , dengan subskrip 13 menunjukkan efek Poisson pada arah 3 akibat tegangan pada arah 1. Rasio Poisson ν_{13} adalah

$$\nu_{13} = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}$$

sehingga ε_3 dapat ditulis sebagai

$$\varepsilon_3 = -\varepsilon_1 \nu_{13}. \quad (3.5)$$

Dengan menyubstitusikan persamaan (3.1) ke persamaan (3.5), regangan ε_3 menjadi

$$\varepsilon_3 = -\nu_{13} \frac{\sigma_1}{E_1}. \quad (3.6)$$

Persamaan (3.6) menunjukkan regangan pada arah 3 yang disebabkan oleh tegangan pada arah 1. Dengan demikian, dapat dilihat bahwa tegangan pada arah 1 menyebabkan terjadinya regangan pada arah 1, 2, dan 3, yang dalam hal ini, regangan yang dihasilkan pada ketiga arah tersebut secara berturut-turut diberikan oleh persamaan (3.1), (3.4), dan (3.6).

Contoh 3.1

Misalkan sebuah lamina memiliki karakteristik seperti yang ditunjukkan pada tabel berikut. Jika satu-satunya tegangan yang bekerja pada elemen lamina tersebut adalah tegangan pada arah 1 sebesar $\sigma_1 = 900$ MPa, tentukan regangan yang dialami oleh elemen lamina tersebut pada arah 1, 2, dan 3.

Parameter	Nilai
E_1	150 GPa
E_2	14 Gpa
E_3	14 Gpa
ν_{12}	0,25
ν_{21}	0,02
ν_{13}	0,25
ν_{31}	0,02
ν_{23}	0,45
ν_{32}	0,45
G_{12}	6 Gpa
G_{13}	6 Gpa
G_{23}	5 Gpa

Jawab

- a) Regangan pada arah 1 dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (3.1), yaitu

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{0,9 \text{ GPa}}{150 \text{ GPa}} \\ &= 0,006.\end{aligned}$$

- b) Karena regangan pada arah 1 telah diketahui, regangan pada arah 2 dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (3.3), yaitu

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= -\varepsilon_1 \nu_{12} = -(0,006)(0,25) \\ &= -0,0015.\end{aligned}$$

- c) Regangan pada arah 3 dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (3.5), yaitu

$$\begin{aligned}\varepsilon_3 &= -\varepsilon_1 \nu_{13} = -(0,006)(0,25) \\ &= 0,0015.\end{aligned}$$

Terlihat bahwa regangan pada arah 1 lebih dominan daripada regangan pada arah 2 dan 3. Selain itu, meskipun tegangan yang bekerja merupakan

tegangan pada arah 1, adanya efek Poisson menyebabkan regangan pada arah 2 dan 3 juga terjadi.

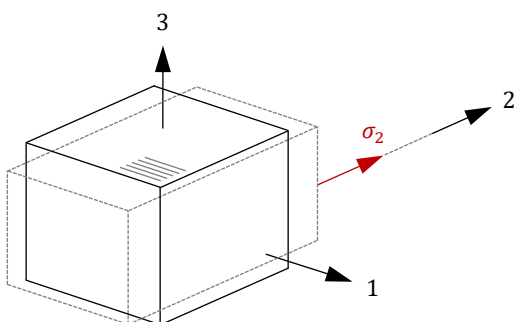
C. Regangan Akibat Tegangan pada Arah 2

Sekarang, mari kita tinjau regangan yang disebabkan oleh tegangan pada arah 2, yaitu σ_2 . Seperti ditunjukkan pada Gambar 3.4, ketika tegangan pada arah 2 bekerja, ini menyebabkan terjadinya regangan pada arah 2. Jika E_2 adalah modulus Young pada arah 2, regangan pada arah 2 adalah ε_2 , yaitu

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2}. \quad (3.7)$$

Kemudian, kita mengetahui bahwa efek Poisson juga menyebabkan terjadinya regangan pada arah 1 dan 3. Untuk menentukan regangan pada arah 1, perhatikan bahwa rasio Poisson ν_{21} adalah

$$\nu_{21} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (3.8)$$



Gambar 3.4 Tegangan pada arah 1 menyebabkan regangan pada arah 2, 1, dan 3.

Berbeda dengan rasio Poisson ν_{12} , rasio Poisson ν_{21} menunjukkan efek Poisson pada arah 1 akibat tegangan pada arah 2. Dengan menuliskan persamaan (3.8) sebagai

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 \nu_{21} \quad (3.9)$$

dan dengan menyubstitusikan persamaan (3.7) ke persamaan (3.9), regangan pada arah 1 akibat tegangan pada arah 2 ditulis sebagai

$$\varepsilon_1 = -\nu_{21} \frac{\sigma_2}{E_2}. \quad (3.10)$$

Kemudian, regangan pada arah 3 dapat ditentukan berdasarkan rasio Poisson ν_{23} , yaitu

$$\nu_{23} = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}. \quad (3.11)$$

Rasio Poisson ν_{23} menunjukkan efek Poisson pada arah 3 akibat tegangan pada arah 2. Berdasarkan persamaan (3.11) dan persamaan (3.7), regangan pada arah 3 akibat tegangan pada arah 2 dapat ditulis sebagai

$$\varepsilon_3 = -\nu_{23} \varepsilon_2 \varepsilon_3$$

maka

$$\varepsilon_3 = -\nu_{23} \frac{\sigma_2}{E_2}. \quad (3.12)$$

Dengan demikian, dapat dilihat bahwa tegangan pada arah 2 menyebabkan terjadinya regangan pada arah 1, 2, dan 3, yang secara berturut-turut diberikan oleh persamaan (3.10), (3.7), dan (3.12).

Contoh 3.2

Misalkan satu-satunya tegangan yang bekerja pada elemen lamina pada Contoh 3.1 adalah tegangan pada arah 2 sebesar $\sigma_2 = 100$ MPa. Tentukan regangan yang dialami lamina tersebut pada arah 1, 2, dan 3.

Jawab

- a) Regangan pada arah 1 dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (3.10), yaitu

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -\nu_{21} \frac{\sigma_2}{E_2} = -(0,02) \frac{(0,1 \text{ GPa})}{(14 \text{ GPa})} \\ &= -0,0001. \end{aligned}$$

- b) Regangan pada arah 2 dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (3.7), yaitu

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E_2} = \frac{(0,1 \text{ GPa})}{(14 \text{ GPa})} \\ &= 0,007.\end{aligned}$$

- c) Regangan pada arah 3 dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (3.12), yaitu

$$\begin{aligned}\varepsilon_3 &= -\nu_{23} \frac{\sigma_2}{E_2} = -(0,45) \frac{(0,1 \text{ GPa})}{(14 \text{ GPa})} \\ &= -0,003.\end{aligned}$$

Terlihat bahwa besar regangan pada arah 1 lebih kecil daripada besar regangan pada arah 3. Hal ini disebabkan oleh rasio Poisson ν_{21} lebih kecil daripada ν_{23} . Rasio Poisson ν_{21} lebih kecil karena arah serat adalah ke arah 1.

D. Regangan Akibat Tegangan pada Arah 3

Selain tegangan pada arah 1 dan 2, tegangan pada arah 3 juga dapat mengakibatkan terjadinya regangan pada arah 1, 2, dan 3 sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 3.5. Ketika tegangan pada arah 3 bekerja, ini menyebabkan terjadinya regangan pada arah 3. Jika E_3 adalah modulus Young pada arah 3, regangan pada arah 3 adalah ε_3 , yaitu

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E_3}. \quad (3.13)$$

Kemudian, kita dapat menuliskan rasio Poisson ν_{31} sebagai

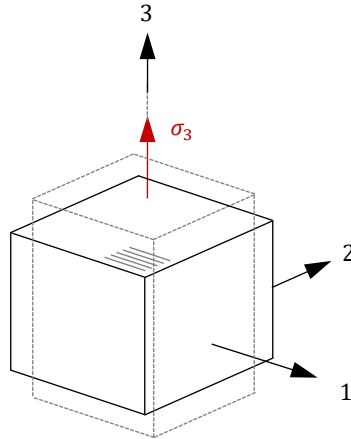
$$\nu_{31} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}. \quad (3.14)$$

Subskrip 31 pada persamaan (3.14) menunjukkan efek Poisson pada arah 1 akibat tegangan pada arah 3. Dengan demikian, berdasarkan persamaan (3.14) dan persamaan (3.13), regangan pada arah 1 akibat tegangan σ_3 dapat dirumuskan sebagai

$$\varepsilon_1 = -\nu_{31} \varepsilon_3$$

maka

$$\varepsilon_1 = -\nu_{31} \frac{\sigma_3}{E_3}. \quad (3.15)$$



Gambar 3.5 Tegangan pada arah 3 menyebabkan regangan pada arah 3, 1, dan 2.

Selain itu, karena rasio Poisson ν_{32} adalah

$$\nu_{32} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3};$$

dengan subskrip 32 menunjukkan efek Poisson pada arah 2 akibat tegangan pada arah 3, regangan pada arah 2 akibat tegangan σ_3 dapat dirumuskan sebagai

$$\varepsilon_2 = -\nu_{32}\varepsilon_3$$

maka

$$\varepsilon_2 = -\nu_{32} \frac{\sigma_3}{E_3}. \quad (3.16)$$

Dengan demikian, dapat dilihat bahwa tegangan pada arah 3 menyebabkan terjadinya regangan pada arah 1, 2, dan 3 yang secara berturut-turut diberikan oleh persamaan (3.15), (3.13), dan (3.16).

Contoh 3.3

Misalkan satu-satunya tegangan yang bekerja pada lamina pada Contoh 3.1 adalah tegangan pada arah 3 sebesar $\sigma_3 = 150$ MPa. Tentukan regangan yang dialami lamina tersebut pada arah 1, 2, dan 3.

Jawab

- a) Regangan pada arah 1 dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (3.15), yaitu

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= -\nu_{31} \frac{\sigma_3}{E_3} = -(0,02) \frac{(0,15 \text{ GPa})}{(14 \text{ GPa})} \\ &= -0,0002.\end{aligned}$$

- b) Regangan pada arah 2 dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (3.16), yaitu

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= -\nu_{32} \frac{\sigma_3}{E_3} = -(0,45) \frac{(0,15 \text{ GPa})}{(14 \text{ GPa})} \\ &= -0,005.\end{aligned}$$

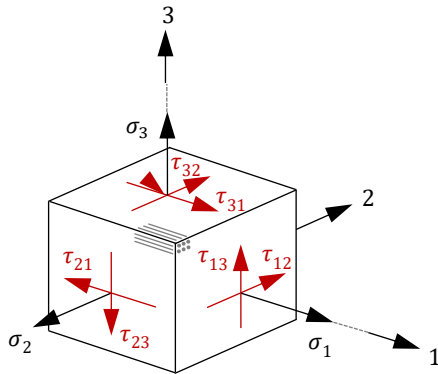
- c) Regangan pada arah 3 dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (3.13), yaitu

$$\begin{aligned}\varepsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{E_3} = \frac{(0,15 \text{ GPa})}{(14 \text{ GPa})} \\ &= 0,01.\end{aligned}$$

Berdasarkan Contoh 3.1, 3.2, dan 3.3, dapat kita lihat bahwa jika kita mengetahui modulus Young dan rasio Poisson lamina, kita bisa menentukan respons lamina tersebut ketika menerima tegangan normal.

E. Tegangan Geser pada Lamina

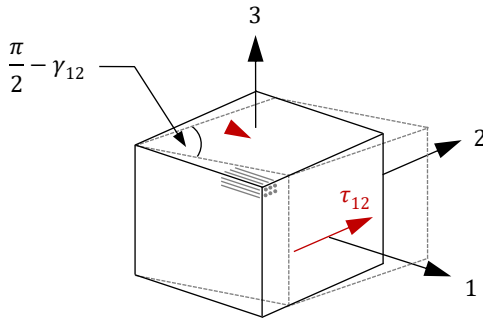
Kita sudah membahas bahwa selain menerima tegangan normal, sebuah lamina juga bisa menerima tegangan geser. Untuk menganalisis akibat tegangan geser tersebut, mari kita bahas terlebih dahulu penamaan tegangan geser yang bekerja pada elemen lamina. Berdasarkan Gambar 3.6, permukaan yang tegak lurus dengan arah 1, 2, dan 3 secara berturut-turut disebut sebagai permukaan 1, 2, dan 3. Pada setiap permukaan tersebut, terdapat tegangan geser. Tegangan geser τ_{12} didefinisikan sebagai tegangan geser yang bekerja pada permukaan 1 dan disebabkan oleh gaya yang bekerja pada arah 2. Cara penamaan yang sama juga berlaku untuk tegangan geser yang lain.



Gambar 3.6 Tegangan Geser yang Bekerja pada Elemen Lamina

Sekarang, mari kita tinjau regangan geser yang disebabkan oleh tegangan geser τ_{12} seperti ditunjukkan pada Gambar 3.7. Pada gambar tersebut dapat dilihat bahwa tegangan geser τ_{12} menyebabkan regangan geser γ_{12} . Karena $\tau = G\gamma$, dapat dituliskan bahwa

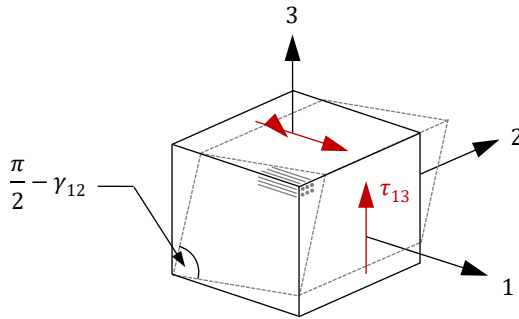
$$\tau_{12} = G_{12}\gamma_{12}. \quad (3.17)$$



Gambar 3.7 Tegangan geser τ_{12} menyebabkan deformasi berupa regangan geser γ_{12} .

Kemudian, berdasarkan Gambar 3.8, dapat dilihat bahwa tegangan geser τ_{13} menyebabkan regangan geser γ_{13} . Dengan demikian, dapat dituliskan bahwa

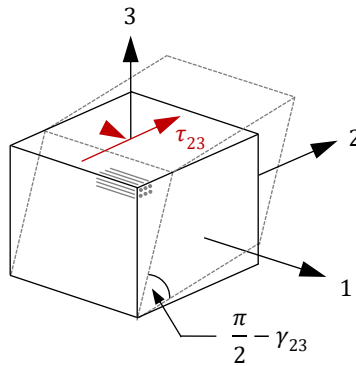
$$\tau_{13} = G_{13}\gamma_{13}. \quad (3.18)$$



Gambar 3.8 Tegangan geser τ_{13} menyebabkan deformasi berupa regangan geser γ_{13} .

Seperti yang sudah kita bahas pada Bab I, karena tegangan geser pada bidang komplement bernilai sama dan berdasarkan kesepakatan mengenai tanda tegangan geser, dapat dituliskan bahwa

$$\tau_{12} = \tau_{21}; \quad \tau_{13} = \tau_{31}; \quad \tau_{23} = \tau_{32}. \quad (3.19)$$



Gambar 3.9 Tegangan geser τ_{23} menyebabkan deformasi berupa regangan geser γ_{23} .

Ini berarti bahwa regangan geser γ_{12} dan γ_{13} juga merupakan regangan geser yang secara berturut-turut disebabkan oleh tegangan geser τ_{21} dan τ_{31} . Kemudian, karena $\tau_{32} = \tau_{23}$, berdasarkan Gambar 3.9, dapat dituliskan bahwa

$$\tau_{23} = G_{23}\gamma_{23}. \quad (3.20)$$

Contoh 3.4

Misalkan elemen lamina pada Contoh 3.1 mengalami deformasi berupa terjadinya regangan geser γ_{23} sebesar 0,003. Tentukan tegangan geser yang bekerja pada elemen lamina tersebut.

Jawab

Karena regangan geser yang terjadi merupakan regangan geser γ_{23} , ini berarti bahwa regangan geser tersebut disebabkan oleh tegangan geser τ_{23} . Deformasi yang dihasilkan oleh tegangan geser τ_{23} adalah seperti ditunjukkan pada Gambar 3.9. Berdasarkan persamaan (3.20), tegangan geser τ_{23} yang bekerja adalah

$$\begin{aligned}\tau_{23} &= G_{23}\gamma_{23} = (5 \text{ GPa})(0,003) \\ &= 150 \text{ MPa.}\end{aligned}$$

Berbeda dengan tegangan normal, tegangan geser τ_{23} hanya menyebabkan regangan geser τ_{23} .

F. Hubungan Umum antara Tegangan dan Regangan pada Sistem Koordinat Utama

Kita sudah membahas bahwa tegangan pada arah 1 dapat menyebabkan regangan pada arah 1, 2, dan 3; begitu juga dengan tegangan pada arah 2 dan 3. Kalau tegangan pada arah 1, 2, dan 3 bekerja secara bersamaan, regangan pada arah 1 sama dengan penjumlahan dari regangan pada arah 1 yang disebabkan oleh tegangan σ_1 , σ_2 , dan σ_3 yang secara berturut-turut diberikan oleh persamaan (3.1), (3.10), dan (3.15), yaitu

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{21} \frac{\sigma_2}{E_2} - \nu_{31} \frac{\sigma_3}{E_3}. \quad (3.21)$$

Kemudian, regangan pada arah 2 sama dengan penjumlahan dari regangan pada arah 2 yang disebabkan oleh tegangan σ_1 , σ_2 , dan σ_3 yang secara berturut-turut diberikan oleh persamaan (3.4), (3.7), dan (3.16), yaitu

$$\varepsilon_2 = -\nu_{12} \frac{\sigma_1}{E_1} + \frac{\sigma_2}{E_2} - \nu_{32} \frac{\sigma_3}{E_3}. \quad (3.22)$$

Selain itu, regangan pada arah 3 sama dengan penjumlahan dari regangan pada arah 3 akibat tegangan σ_1 , σ_2 , dan σ_3 yang secara berturut-turut diberikan oleh persamaan (3.6), (3.12), dan (3.13), yaitu

$$\varepsilon_3 = -\nu_{13} \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{23} \frac{\sigma_2}{E_2} + \frac{\sigma_3}{E_3}. \quad (3.23)$$

Dengan demikian, perhatikan bahwa berdasarkan persamaan (3.21), (3.22), (3.23), (3.17), (3.18), dan (3.20), hubungan antara tegangan dan regangan, dapat ditulis dalam bentuk yang lebih padu, yaitu

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Matriks 6×6 pada persamaan (3.24) disebut sebagai *matriks komplan*. Berdasarkan persamaan tersebut, jika kita mengetahui tegangan normal, tegangan geser dan sifat-sifat lamina yang diberikan oleh parameter-parameter yang terdapat pada matriks komplan, regangan normal dan regangan geser yang dihasilkan dapat ditentukan. Kemudian, persamaan (3.24) juga bisa ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

dengan

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \frac{1}{E_1}; & S_{12} &= \frac{-\nu_{21}}{E_2}; & S_{13} &= \frac{-\nu_{31}}{E_3}; \\
S_{21} &= \frac{-\nu_{12}}{E_1}; & S_{22} &= \frac{1}{E_2}; & S_{23} &= \frac{-\nu_{32}}{E_3}; \\
S_{31} &= \frac{-\nu_{13}}{E_1}; & S_{32} &= \frac{-\nu_{23}}{E_2}; & S_{33} &= \frac{1}{E_3}; \\
S_{44} &= \frac{1}{G_{23}}; & S_{55} &= \frac{1}{G_{13}}; & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Selain itu, dengan mendefinisikan ε_{123} sebagai

$$\varepsilon_{123} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

dan σ_{123} sebagai

$$\sigma_{123} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}, \tag{3.28}$$

persamaan (3.27) atau (3.28) juga bisa ditulis sebagai

$$\varepsilon_{123} = S\sigma_{123}; \tag{3.29}$$

dengan S merupakan matriks komplan. Subskrip 123 pada ε_{123} dan σ_{123} secara berturut-turut menunjukkan regangan dan tegangan pada sistem koordinat utama.

Berdasarkan konsep aljabar linier kita mengetahui bahwa $S^{-1}S = I$, dengan I merupakan matriks identitas sehingga $I\sigma_{123} = \sigma_{123}$. Oleh karena itu, jika kedua ruas persamaan (3.29) dikalikan dengan invers matriks S ,

$$S^{-1}\varepsilon_{123} = S^{-1}S\sigma_{123} = \sigma_{123}$$

atau

$$\sigma_{123} = C\varepsilon_{123}; \tag{3.30}$$

dengan $C = S^{-1}$. Jika

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{33} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix},$$

persamaan (3.30) juga dapat ditulis

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{33} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}. \tag{3.31}$$

Matriks C disebut sebagai *matriks kekakuan*, atau biasanya juga disebut sebagai *matriks modulus* atau *matriks elastisitas*.

Contoh 3.5

Misalkan elemen lamina pada Contoh 3.1 menerima tegangan $\sigma_1 = 1.000$ MPa, $\sigma_2 = 160$ MPa, $\sigma_3 = 15$ MPa, $\tau_{23} = 0$, $\tau_{13} = 0$ dan $\tau_{12} = 100$ MPa secara bersamaan. Tentukan matriks komplan dari elemen lamina, regangan ε_1 , ε_2 , ε_3 , γ_{23} , γ_{13} , dan γ_{12} yang dialami oleh elemen lamina tersebut.

Jawab

- a) Komponen-komponen matriks komplian dari lamina dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (3.26), yaitu

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} = \frac{1}{150 \text{ GPa}} = 6,67 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1},$$

$$S_{12} = \frac{-\nu_{21}}{E_2} = \frac{-0,02}{14 \text{ GPa}} = -1,42 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1},$$

$$S_{21} = \frac{-\nu_{12}}{E_1} = \frac{-0,25}{150 \text{ GPa}} = -1,67 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1},$$

$$S_{22} = \frac{1}{E_2} = \frac{1}{14 \text{ GPa}} = 71,43 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1},$$

$$S_{13} = \frac{-\nu_{31}}{E_3} = \frac{-0,02}{14 \text{ GPa}} = -1,42 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1},$$

$$S_{31} = \frac{-\nu_{13}}{E_1} = \frac{-0,25}{150 \text{ GPa}} = -1,67 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1},$$

$$S_{23} = \frac{-\nu_{32}}{E_3} = \frac{-0,45}{14 \text{ GPa}} = 32,14 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1},$$

$$S_{32} = \frac{-\nu_{23}}{E_2} = \frac{-0,45}{14 \text{ GPa}} = 32,14 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1},$$

$$S_{33} = \frac{1}{E_3} = \frac{1}{14 \text{ GPa}} = 71,43 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1},$$

$$S_{44} = \frac{1}{G_{23}} = \frac{1}{5 \text{ GPa}} = 200 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1},$$

$$S_{55} = \frac{1}{G_{13}} = \frac{1}{6 \text{ GPa}} = 166,67 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1},$$

$$S_{66} = \frac{1}{G_{12}} = 166,67 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}.$$

Dengan demikian, matriks komplan lamina pada Contoh 3.1 adalah

$$S = \begin{bmatrix} 6,67 & -1,42 & -1,42 & 0 & 0 & 0 \\ -1,67 & 71,43 & 32,14 & 0 & 0 & 0 \\ -1,67 & 32,14 & 71,43 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 166,67 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 166,67 \end{bmatrix} \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}.$$

Ingat, $1 \text{ GPa} = 10^9 \text{ Pa}$ dan perhatikan bahwa matriks komplan dari suatu lamina hanya bergantung pada parameter-parameter yang diberikan pada Contoh 3.1. Matriks tersebut tidak bergantung pada tegangan yang bekerja pada lamina.

- b) Kita sudah menentukan matriks komplan dari lamina. Selanjutnya, regangan ε_1 , ε_2 , ε_3 , γ_{23} , γ_{13} , dan γ_{12} yang dialami oleh lamina dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (3.25) atau (3.29). Karena

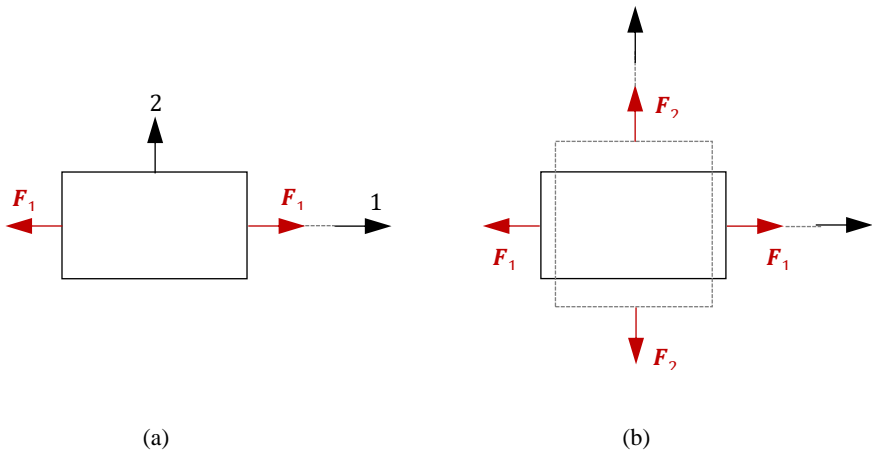
$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1,6 \\ 0,15 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times 10^8 \text{ Pa},$$

dan karena kita juga sudah menentukan matriks S , berdasarkan persamaan (3.25) atau (3.29), regangan yang dialami oleh elemen lamina adalah

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} 10 \\ 1,6 \\ 0,15 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times 10^8 \text{ Pa} = \begin{bmatrix} 0,0064 \\ 0,010 \\ 0,0045 \\ 0 \\ 0 \\ 0,017 \end{bmatrix}.$$

G. Teorema Resiprokal Maxwell-Betti

Berdasarkan persamaan (3.24) dan (3.31), dapat dilihat bahwa untuk mengetahui hubungan antara tegangan dan regangan pada lamina, kita perlu mengetahui 12 parameter yang menunjukkan sifat lamina, yaitu tiga modulus Young ($E_1, E_2,$ dan E_3), enam rasio Poisson ($\nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{31}, \nu_{13}, \nu_{23},$ dan ν_{32}), dan tiga modulus Geser ($G_{12}, G_{13},$ dan G_{23}). Perlu diketahui bahwa kedua belas parameter tersebut ada yang saling berkaitan. Keterkaitan di antara parameter-parameter tersebut dapat ditentukan berdasarkan teorema resiprokal Maxwell-Betti. Berdasarkan teorema tersebut, nantinya kita akan melihat bahwa kita hanya membutuhkan sembilan parameter saja.



Keterangan: (a) Pertambahan Panjang pada Arah 1 Akibat Gaya F_1 dan (b) Pertambahan Panjang pada Arah 2 serta Pengurangan Panjang pada Arah 1 Akibat Gaya F_2
Gambar 3.10 Perubahan Panjang Lamina Akibat Gaya pada Arah 1 Kemudian Arah 2

Misalkan gaya F_1 bekerja pada elemen lamina seperti ditunjukkan pada Gambar 3.10a. Akibatnya, elemen lamina tersebut mengalami perubahan panjang secara perlahan pada arah 1 sebesar $\delta\Delta_1$. Selama perubahan panjang tersebut, besar gaya F_1 juga bertambah besar secara perlahan. Seperti yang sudah kita bahas pada Bab I, selama pertambahan panjang tersebut, usaha yang dilakukan oleh gaya F_1 adalah W_1 , yaitu

$$W_1 = \frac{1}{2} F_1 \delta\Delta_1. \tag{3.32}$$

Ketika gaya F_1 masih bekerja, misalkan kita menambahkan gaya F_2 seperti ditunjukkan pada Gambar 3.10b. Akibatnya, elemen tersebut mengalami

perubahan panjang sebesar $\delta\Delta_2$ pada arah 2. Dengan demikian, usaha yang dilakukan oleh gaya F_2 adalah W_2 , yaitu

$$W_2 = \frac{1}{2} F_2 \delta\Delta_2. \quad (3.33)$$

Kemudian, perhatikan bahwa akibat efek Poisson, ketika elemen lamina menerima gaya F_2 , elemen lamina juga mengalami perubahan panjang pada arah 1 sebesar $\delta\Delta_{1/2}$. Pada keadaan tersebut gaya F_1 juga sedang bekerja, meskipun gaya F_1 bernilai konstan, tetapi gaya F_1 tetap melakukan usaha akibat perubahan panjang $\delta\Delta_{1/2}$ yang disebabkan oleh gaya F_2 . Dengan demikian, usaha yang dilakukan oleh gaya F_1 karena adanya perubahan panjang $\delta\Delta_{1/2}$ yang disebabkan oleh gaya F_2 adalah $W_{1/2}$, yaitu

$$W_{1/2} = F_1 \delta\Delta_{1/2}. \quad (3.34)$$

Dengan demikian, usaha total ketika gaya F_1 bekerja dan setelah itu diikuti oleh gaya F_2 adalah W_{tot} , yaitu

$$W_{tot} = W_1 + W_2 + W_{1/2}. \quad (3.35)$$

Sekarang, mari kita tentukan usaha total jika gaya yang pertama bekerja adalah gaya F_2 . Ketika gaya F_2 bekerja, misalkan elemen lamina mengalami perubahan panjang pada arah 2 sebesar $\delta\Delta_2$. Sama seperti kasus sebelumnya, selama proses perubahan panjang tersebut, usaha oleh gaya F_2 juga bernilai W_2 . Kemudian, ketika gaya F_2 masih bekerja, misalkan kita menambahkan gaya F_1 sehingga lamina mengalami penambahan panjang pada arah 1 sebesar $\delta\Delta_1$. Dengan demikian, usaha yang dilakukan oleh gaya F_1 juga sama dengan W_1 . Ilustrasi untuk kasus ini sebagaimana ditunjukkan Gambar 3.11. Selanjutnya, kita juga mengetahui bahwa karena efek Poisson, tarikan gaya F_1 juga menyebabkan perubahan panjang pada arah 2 sebesar $\Delta_{2/1}$. Dengan demikian, usaha yang dilakukan oleh gaya F_2 akibat perubahan panjang yang disebabkan oleh gaya F_1 adalah $W_{2/1}$, yaitu

$$W_{2/1} = F_2 \delta\Delta_{2/1}. \quad (3.36)$$

Dengan demikian, usaha total ketika gaya F_2 bekerja dan setelah itu diikuti oleh gaya F_1 juga sama dengan W_{tot} , yaitu

$$W_{tot} = W_2 + W_1 + W_{2/1}. \quad (3.37)$$

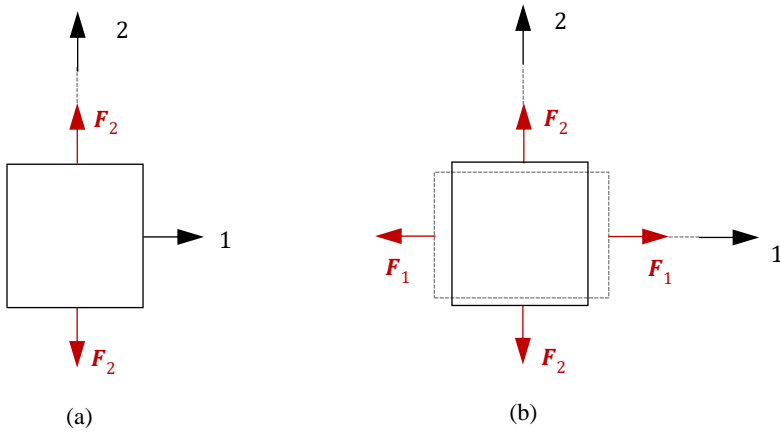
Dengan menyamakan persamaan (3.31) dan (3.35),

$$W_1 + W_2 + W_{1/2} = W_2 + W_1 + W_{2/1};$$

$$W_{1/2} = W_{2/1}. \quad (3.38)$$

Persamaan (3.38) merupakan teorema Maxwell-Betti. Teorema ini menyatakan bahwa usaha yang dilakukan oleh gaya F_1 karena perubahan panjang yang diakibatkan oleh gaya F_2 sama dengan usaha yang dilakukan oleh gaya F_2 karena perubahan panjang yang diakibatkan oleh gaya F_1 . Secara umum, dapat dituliskan bahwa

$$W_{i/j} = W_{j/i}. \quad (3.39)$$

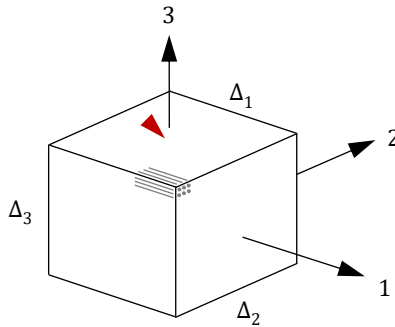


Keterangan: (a) Pertambahan Panjang pada Arah 2 Akibat Gaya F_2 dan (b) Pertambahan Panjang pada Arah 1 dan Pengurangan Panjang pada Arah 2 Akibat Gaya F_1
Gambar 3.11 Perubahan Panjang Lamina Akibat Gaya pada Arah 2 Kemudian Arah 1

H. Implikasi Teorema Resiprokal Maxwell-Betti

Untuk mengetahui implikasi dari teorema resiprokal Maxwell-Betti, misalkan elemen lamina yang kita analisis memiliki panjang sisi-sisi sebesar Δ_1 , Δ_2 , dan Δ_3 seperti ditunjukkan pada Gambar 3.12. Kita sudah membahas bahwa ketika elemen lamina pada awalnya menerima gaya F_1 dan setelah itu menerima gaya F_2 , usaha yang dilakukan oleh gaya F_1 akibat perubahan panjang yang disebabkan oleh gaya F_2 diberikan oleh persamaan (3.34), yaitu $W_{1/2} = F_1 \delta \Delta_{1/2}$. Dengan mengabaikan deformasi yang disebabkan oleh gaya F_1 , perubahan panjang pada arah 2 adalah $\delta \Delta_{1/2}$, yaitu

$$\delta \Delta_{1/2} = \varepsilon_1 \Delta_1. \quad (3.40)$$



Gambar 3.12 Elemen Lamina dengan Panjang Sisi-sisinya Sebesar Δ_1 , Δ_2 , dan Δ_3

Kemudian, karena $\varepsilon_1 = -\nu_{21}\varepsilon_2$ dan $\varepsilon_2 = \sigma_2/E_2$, persamaan (3.40) dapat ditulis sebagai

$$\delta\Delta_{1/2} = -\nu_{21}\varepsilon_2\Delta_1 = -\nu_{21}\frac{\sigma_2}{E_2}\Delta_1. \quad (3.41)$$

Kemudian, perhatikan bahwa $F_1 = \sigma_1\Delta_1\Delta_3$ sehingga dengan menyubstitusikan persamaan (3.41) ke persamaan (3.34), usaha $W_{1/2}$ dapat ditulis sebagai

$$W_{1/2} = \sigma_1\Delta_2\Delta_3 \left(-\nu_{21}\frac{\sigma_2}{E_2}\Delta_1 \right) = -\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_1\sigma_2\Delta_1\Delta_2\Delta_3. \quad (3.42)$$

Sekarang, misalkan pada awalnya gaya F_2 bekerja pertama kali dan deformasi yang diakibatkannya diabaikan. Kemudian, ketika gaya F_1 diberikan, elemen lamina mengalami kontraksi pada arah 2 akibat efek Poisson ν_{12} . Kita sudah membahas bahwa usaha yang dilakukan oleh gaya F_2 akibat perubahan panjang yang disebabkan oleh gaya F_1 diberikan oleh persamaan (3.36), yaitu $W_{2/1} = F_2\delta\Delta_{2/1}$. Kemudian, perhatikan bahwa perubahan panjang pada arah 2 adalah

$$\delta\Delta_2 = \varepsilon_2\Delta_2. \quad (3.43)$$

Karena $\varepsilon_2 = -\nu_{12}\varepsilon_1$ dan $\varepsilon_1 = \sigma_1/E_1$, persamaan (3.43) dapat ditulis sebagai

$$\delta\Delta_2 = -\nu_{12}\varepsilon_1\Delta_2 = -\nu_{12}\frac{\sigma_1}{E_1}\Delta_2. \quad (3.44)$$

Kemudian, perhatikan bahwa $F_2 = \sigma_2\Delta_1\Delta_3$ sehingga dengan menyubstitusikan persamaan (3.44) ke persamaan (3.36), usaha $W_{2/1}$ dapat ditulis sebagai

$$W_{2/1} = \sigma_2\Delta_1\Delta_3 \left(-\nu_{12}\frac{\sigma_1}{E_1}\Delta_2 \right) = -\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_1\sigma_2\Delta_1\Delta_2\Delta_3. \quad (3.45)$$

Berdasarkan teorema Maxwell-Betti, dapat dituliskan bahwa

$$W_{2/1} = W_{1/2};$$

$$-\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_1 \sigma_2 \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_1 \sigma_2 \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3.$$

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}. \quad (3.46)$$

Dengan cara yang sama, kita bisa menuliskan bahwa

$$\frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3} \quad (3.47)$$

dan

$$\frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}. \quad (3.48)$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (3.46), (3.47), dan (3.48), pada persamaan (3.26) dapat dituliskan bahwa

$$S_{12} = S_{21}; \quad S_{13} = S_{31}; \quad S_{32} = S_{23}. \quad (3.49)$$

Dengan demikian, persamaan (3.25) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}, \quad (3.50)$$

dengan

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}; \quad S_{12} = \frac{-\nu_{12}}{E_1}; \quad S_{13} = \frac{-\nu_{13}}{E_3};$$

$$S_{22} = \frac{1}{E_2}; \quad S_{23} = \frac{-\nu_{23}}{E_2}; \quad S_{33} = \frac{1}{E_1}; \quad (3.51)$$

$$S_{44} = \frac{1}{G_{23}}; \quad S_{55} = \frac{1}{G_{13}}; \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}}.$$

Berdasarkan persamaan (3.50) dan (3.51), dapat dilihat bahwa untuk menentukan matriks komplan, kita tidak lagi membutuhkan 12 parameter, tetapi sembilan parameter, yaitu tiga modulus Young (E_1 , E_2 , dan E_3), tiga rasio Poisson (ν_{12} , ν_{21} , dan ν_{23}), dan tiga modulus Geser (G_{12} , G_{13} , dan G_{23}).

Kemudian, dengan mengalikan kedua ruas persamaan (3.46) dengan invers matriks komplan, dapat dituliskan bahwa

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (3.52)$$

Dalam bentuk komponen matriks komplan, komponen matriks kekakuan pada persamaan (3.52) adalah

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{S_{22}S_{33} - S_{23}S_{23}}{S}; & C_{12} &= \frac{S_{13}S_{23} - S_{12}S_{33}}{S}; \\ C_{22} &= \frac{S_{33}S_{11} - S_{13}S_{13}}{S}; & C_{13} &= \frac{S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22}}{S}; \\ C_{33} &= \frac{S_{11}S_{22} - S_{12}S_{12}}{S}; & C_{23} &= \frac{S_{12}S_{13} - S_{23}S_{11}}{S}; \\ C_{44} &= \frac{1}{S_{44}}; & C_{55} &= \frac{1}{S_{55}}; \\ C_{66} &= \frac{1}{S_{66}}; \end{aligned} \quad (3.53)$$

dan

$$S = S_{11}S_{22}S_{33} - S_{11}S_{23}S_{23} - S_{22}S_{13}S_{13} - S_{33}S_{12}S_{12} + 2S_{12}S_{23}S_{13}. \quad (3.54)$$

Cara penentuan invers matriks komplan atau penentuan matriks 6×6 pada persamaan (3.52) adalah di luar cakupan buku ini.

Contoh 3.6

Berdasarkan Contoh 3.1 dan 3.5, tentukan matriks kekakuan dari lamina pada contoh tersebut. Kemudian, jika lamina tersebut mengalami regangan berupa $\varepsilon_1 = 0,0014$ dan $\tau_{12} = 0,0011$, tentukan tegangan-tegangan yang bekerja pada lamina tersebut.

Jawab

- a) Kita sudah membahas komponen-komponen matriks komplan pada Contoh 3.5. Dengan demikian, berdasarkan persamaan (3.52) dan (3.53), Komponen-komponen matriks kekakuan lamina adalah

$$C_{11} = 150,8 \times 10^9 \text{ Pa},$$

$$C_{12} = 2,07 \times 10^9 \text{ Pa},$$

$$C_{22} = 17,6 \times 10^9 \text{ Pa},$$

$$C_{13} = -7,87 \times 10^9 \text{ Pa},$$

$$C_{23} = -7,87 \times 10^9 \text{ Pa},$$

$$C_{33} = 17,6 \times 10^9 \text{ Pa},$$

$$C_{44} = 5 \times 10^9 \text{ Pa},$$

$$C_{55} = 6 \times 10^9 \text{ Pa},$$

$$C_{66} = 6 \times 10^9 \text{ Pa}.$$

Dengan demikian, matriks kekakuan dari lamina pada Contoh 3.1 adalah

$$C = \begin{bmatrix} 150,8 & 2,07 & -7,87 & 0 & 0 & 0 \\ 2,07 & 17,6 & -7,87 & 0 & 0 & 0 \\ -7,87 & -7,87 & 17,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \times 10^9 \text{ Pa.}$$

Perhatikan, satuan komponen-komponen matriks kekakuan adalah Pa karena satuan pembilang pada persamaan (3.53) adalah Pa^{-2} dan satuan penyebutnya adalah Pa^{-3} .

- b) Ketika lamina mengalami regangan berupa $\varepsilon_1 = 0,0014$ dan $\tau_{12} = 0,0011$, tegangan-tegangan yang bekerja pada lamina tersebut dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (3.48), yaitu

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150,8 & 2,07 & -7,87 & 0 & 0 & 0 \\ 2,07 & 17,6 & -7,87 & 0 & 0 & 0 \\ -7,87 & -7,87 & 17,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0014 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,0011 \end{bmatrix} \times 10^9 \text{ Pa}$$

$$= \begin{bmatrix} 0211,12 \\ 2,90 \\ -11,018 \\ 0 \\ 0 \\ 6,6 \end{bmatrix} \text{MPa.}$$

Terlihat bahwa meskipun regangan yang dialami oleh lamina hanya regangan pada arah 1 dan regangan geser γ_{12} , tetapi tegangan pada arah 2 dan 3 tetap bekerja. Tegangan tersebut bekerja untuk melawan efek Poisson yang dihasilkan oleh masing-masing tegangan, khususnya tegangan pada arah 1.

I. Asumsi Tegangan Bidang dan Matriks Komplian Tereduksi

Dalam analisis mekanika material komposit, asumsi penting yang sangat berguna adalah sebuah asumsi yang disebut sebagai *asumsi tegangan bidang*. Berdasarkan persamaan (3.46), dapat dilihat bahwa secara umum terdapat enam tegangan yang bekerja pada lamina. Akan tetapi, perlu diketahui bahwa pada banyak aplikasi material komposit, tiga tegangan yang tegak lurus dengan bidang lamina, yaitu σ_3 , τ_{23} , dan τ_{13} jauh lebih kecil daripada tiga tegangan yang lain. Oleh sebab itu, ketiga tegangan tersebut diasumsikan bernilai nol. Dengan demikian, tegangan-tegangan yang bekerja hanyalah tegangan yang sejajar dengan bidang lamina yaitu σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} sehingga asumsi tersebut disebut sebagai *asumsi tegangan bidang*. Karena berdasarkan asumsi tegangan bidang, σ_3 , τ_{23} , dan τ_{13} sama dengan nol, hubungan antara tegangan dan regangan yang diberikan oleh persamaan (3.46) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}. \quad (3.55)$$

Karena σ_3 , τ_{23} , dan τ_{13} sama dengan nol, berdasarkan persamaan (3.55) dapat dituliskan bahwa

$$\gamma_{23} = 0, \quad \gamma_{13} = 0,$$

dan

$$\varepsilon_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2. \quad (3.56)$$

Berdasarkan persamaan (3.56), dapat dilihat bahwa meskipun σ_3 diasumsikan sama dengan nol, regangan pada arah tersebut tidak sama dengan nol. Hal ini disebabkan oleh adanya efek Poisson ν_{13} dan ν_{23} . Kemudian, karena σ_3 , τ_{23} , τ_{13} , γ_{23} , dan γ_{13} sama dengan nol, untuk menyederhanakan penulisan, berdasarkan persamaan (3.51), hubungan ε_1 , ε_2 , dan γ_{12} dengan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} lebih sering ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}. \quad (3.57)$$

Selain itu, ingat bahwa

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \frac{1}{E_1}; & S_{12} &= \frac{-\nu_{12}}{E_1} = \frac{-\nu_{21}}{E_2}; \\
 S_{22} &= \frac{1}{E_2}; & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}}.
 \end{aligned}
 \tag{3.58}$$

Matriks 3×3 pada persamaan (3.57) disebut sebagai *matriks komplian tereduksi*. Perhatikan bahwa persamaan (3.57) bukan berarti menunjukkan bahwa regangan pada arah 3 sama dengan nol. Regangan pada arah 3 tetap terjadi dan nilainya diberikan oleh persamaan (3.56).

Contoh 3.7

Sebuah lamina karbon/epoksi memiliki sifat dengan $E_1 = 155$ GPa, $E_2 = 12$ Gpa, $E_3 = 12$ Gpa $G_{12} = 9$ Gpa, $\nu_{12} = 0,25$, dan $\nu_{13} = 0,25$. Dengan menggunakan asumsi tegangan bidang, tentukan regangan yang dialami oleh lamina tersebut jika menerima tegangan berupa $\sigma_1 = 1.500$ Mpa.

Jawab

Sama seperti contoh sebelumnya, untuk menentukan regangan yang dialami oleh lamina, kita perlu terlebih dahulu menentukan komponen-komponen matriks komplian tereduksi dari lamina tersebut. Komponen-komponen tersebut dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (3.58), yaitu

$$S_{11} = 6,45 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1},$$

$$S_{12} = -1,61 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1},$$

$$S_{22} = 83,33 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1},$$

$$S_{66} = 111,1 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}.$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (3.57), matriks komplian tereduksi lamina adalah

$$S = \begin{bmatrix} 6,45 & -1,61 & 0 \\ -1,61 & 83,33 & 0 \\ 0 & 0 & 111,1 \end{bmatrix} \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$$

sehingga regangan yang dialami oleh lamina adalah

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 6,45 & -1,61 & 0 \\ -1,61 & 83,33 & 0 \\ 0 & 0 & 111,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,5 \times 10^9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{-12} \\ &= \begin{bmatrix} 0,0097 \\ -0,0024 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Kemudian, ingat bahwa meskipun kita menerapkan asumsi tegangan bidang, ini bukan berarti bahwa regangan pada arah 3 sama dengan nol. Regangan pada arah 3 dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (3.56), yaitu

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 &= S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2 = S_{13} = \frac{-\nu_{13}}{E_3}\sigma_1 + S_{23}(0) \\ &= \frac{-0,25}{(12 \times 10^9 \text{ Pa})} (1,5 \times 10^9 \text{ Pa}) \\ &= -0,031 \end{aligned}$$

Tanda minus menunjukkan bahwa lamina mengalami penipisan. Kemudian, perhatikan bahwa proses penentuan regangan yang dialami oleh lamina sama persis seperti yang kita lakukan pada Contoh 3.5. Hanya saja, pada Contoh ini, kita mengasumsikan bahwa lamina hanya mengalami tegangan bidang.

J. Matriks Kekakuan Tereduksi

Karena tegangan σ_3 , τ_{23} , dan τ_{32} pada asumsi tegangan bidang sama dengan nol, persamaan (3.52) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (3.59)$$

Berdasarkan persamaan (3.59), dapat dituliskan bahwa

$$\gamma_{23} = 0, \quad \gamma_{13} = 0.$$

Kemudian, karena σ_3 sama dengan nol,

$$\begin{aligned} 0 &= C_{31}\varepsilon_{31} + C_{32}\varepsilon_2 + C_{33}\varepsilon_3; \\ \varepsilon_3 &= -\frac{C_{13}}{C_{33}}\varepsilon_1 - \frac{C_{32}}{C_{33}}\varepsilon_2. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Sekali lagi, persamaan (3.60) menunjukkan bahwa meskipun pada asumsi tegangan bidang σ_3 sama dengan nol, regangan pada arah 3 tetap mungkin terjadi dan regangan tersebut dapat ditentukan jika ε_1 dan ε_2 diketahui.

Selanjutnya, berdasarkan persamaan (3.59), tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} dapat ditulis sebagai

$$\sigma_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\varepsilon_3; \quad (3.61)$$

$$\sigma_2 = C_{21}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{23}\varepsilon_3; \quad (3.62)$$

$$\tau_{12} = C_{66}\gamma_{12}. \quad (3.63)$$

Dengan menyubstitusikan persamaan (3.60) ke persamaan (3.61),

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\left(-\frac{C_{13}}{C_{33}}\varepsilon_1 - \frac{C_{32}}{C_{33}}\varepsilon_2\right) \\ &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 - \frac{C_{13}C_{13}}{C_{33}}\varepsilon_1 - \frac{C_{13}C_{32}}{C_{33}}\varepsilon_2 \end{aligned}$$

maka

$$\sigma_1 = \left(C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}\right)\varepsilon_1 + \left(C_{12} - \frac{C_{13}C_{32}}{C_{33}}\right)\varepsilon_2. \quad (3.64)$$

Kemudian, dengan menyubstitusikan persamaan (3.60) ke persamaan (3.62),

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= C_{21}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{23}\left(-\frac{C_{13}}{C_{33}}\varepsilon_1 - \frac{C_{32}}{C_{33}}\varepsilon_2\right) \\ &= C_{21}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 - \frac{C_{23}C_{13}}{C_{33}}\varepsilon_1 - \frac{C_{23}^2}{C_{33}}\varepsilon_2 \end{aligned}$$

maka

$$\sigma_2 = \left(C_{21} - \frac{C_{23}C_{13}}{C_{33}} \right) \varepsilon_1 + \left(C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}} \right) \varepsilon_2. \quad (3.65)$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (3.63), (3.64), dan (3.65), hubungan antara tegangan (σ_1 , σ_2 , dan τ_{12}) dan regangan (ε_1 , ε_2 , dan γ_{12}) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}, \quad (3.66)$$

dengan

$$Q_{11} = C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}; \quad (3.67)$$

$$Q_{12} = C_{12} - \frac{C_{13}C_{32}}{C_{33}}; \quad (3.68)$$

$$Q_{22} = C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}}; \quad (3.69)$$

$$Q_{66} = C_{66}. \quad (3.70)$$

Matriks 3×3 pada persamaan (3.66) disebut sebagai *matriks kekakuan tereduksi*. Kemudian, perhatikan bahwa hubungan antara tegangan (σ_1 , σ_2 , dan τ_{12}) dan regangan (ε_1 , ε_2 , dan γ_{12}) tidak dapat ditulis sebagai

~~$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$~~

Selanjutnya, dengan menginversi persamaan (3.57) dan membandingkannya dengan persamaan (3.66), dapat disimpulkan bahwa

$$Q_{11} = \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}; \quad (3.71)$$

$$Q_{12} = \frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}; \quad (3.72)$$

$$Q_{22} = \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}; \quad (3.73)$$

$$Q_{66} = \frac{1}{S_{16}}. \quad (3.74)$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (3.58), persamaan (3.71), (3.72), (3.73), dan (3.74) dapat ditulis sebagai

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad (3.75)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad (3.76)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad (3.77)$$

$$Q_{66} = G_{12}. \quad (3.78)$$

Perhatikan bahwa rasio Poisson ν_{21} dapat ditentukan dengan menggunakan teorema Maxwell-Betti jika modulus young E_1 , E_2 , dan ν_{12} diketahui, yang dalam hal ini, berdasarkan persamaan (3.46) dapat dituliskan bahwa

$$\nu_{21} = \frac{\nu_{12}}{E_1} E_2. \quad (3.79)$$

Dengan demikian, untuk menentukan komponen-komponen matriks kekakuan tereduksi, kita sebetulnya hanya memerlukan empat parameter saja, yaitu modulus Young E_1 dan E_2 , rasio Poisson ν_{12} atau ν_{21} , serta modulus geser G_{12} .

Contoh 3.8

Sebuah lamina karbon/epoksi memiliki sifat dengan $E_1 = 160$ GPa, $E_2 = 14$ GPa, $G_{12} = 10$ GPa, dan $\nu_{12} = 0,25$. Dengan menggunakan asumsi tegangan bidang, tentukan tegangan yang bekerja pada lamina tersebut jika lamina tersebut mengalami regangan berupa $\varepsilon_1 = 0,0015$, $\varepsilon_2 = 0$, dan $\gamma_{12} = 0$.

Jawab

Berdasarkan persamaan (3.79), dapat dituliskan bahwa

$$\begin{aligned} \nu_{21} &= \frac{\nu_{12}}{E_1} E_2 = \frac{(0,25)}{(160 \text{ GPa})} (14 \text{ GPa}) \\ &= 0,02. \end{aligned}$$

Dengan demikian, komponen-komponen matriks kekakuan tereduksi dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (3.75)–(3.78), yaitu

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{(160 \text{ GPa})}{1 - (0,25)(0,02)} = 160,9 \times 10^9 \text{ Pa},$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{(0,02)(14 \text{ GPa})}{1 - (0,25)(0,02)} = 3,52 \times 10^9 \text{ Pa},$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{(14 \text{ GPa})}{1 - (0,25)(0,02)} = 14,08 \times 10^9 \text{ Pa},$$

$$Q_{66} = 10 \times 10^9 \text{ Pa}.$$

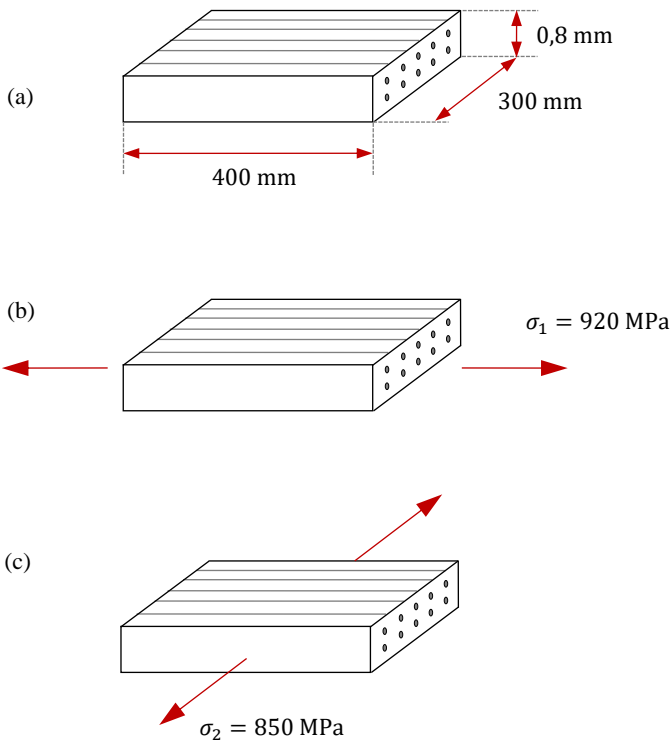
Karena kita sudah mengetahui komponen-komponen matriks komplan tereduksi, tegangan-tegangan yang bekerja pada elemen lamina dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (3.62), yaitu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 160,9 & 3,52 & 0 \\ 3,52 & 14,08 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0015 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^9 \text{ Pa} \\ &= \begin{bmatrix} 241,3 \\ 0,05 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}. \end{aligned}$$

Tegangan pada arah 2 bekerja pada lamina untuk melawan efek Poisson pada arah 2 yang dihasilkan oleh tegangan pada arah 1. Dengan adanya tegangan σ_2 , regangan pada arah 2 menjadi nol. Jika tegangan σ_2 sama dengan nol, regangan pada arah 2 akan bernilai negatif akibat adanya efek Poisson.

Soal-soal

- Sebuah lamina kaca/epoksi memiliki sifat dengan $E_1 = 45 \text{ GPa}$, $E_2 = E_3 = 7 \text{ GPa}$, $G_{12} = G_{31} = 6 \text{ GPa}$, dan $\nu_{12} = \nu_{13} = 0,25$. Tentukan regangan dan perubahan panjang dimensi yang akan dialami lamina tersebut (gambar a) jika menerima tegangan seperti ditunjukkan pada gambar b dan c.



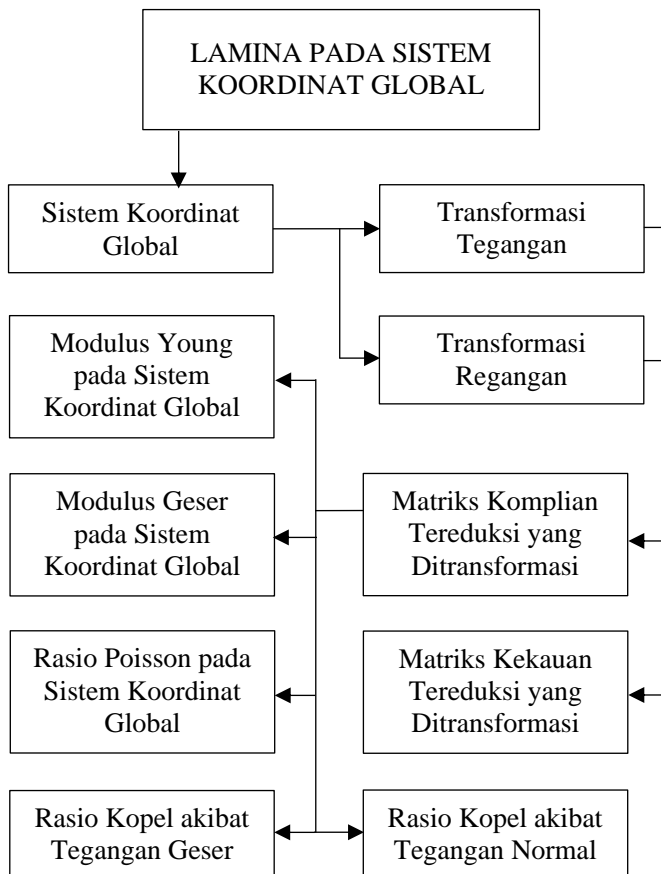
- Jelaskan apa implikasi dari teorema Maxwell-Betti terhadap hubungan antara tegangan dan regangan pada suatu lamina.
- Jelaskan apa yang dimaksud dengan asumsi tegangan bidang.
- Ulangi Contoh 3.5 dengan menerapkan asumsi tegangan bidang dan bandingkan hasilnya dengan dengan contoh tersebut.

5. Sebuah lamina karbon/epoksi memiliki sifat dengan $E_1 = 150$ GPa, $E_2 = 10$ GPa, $G_{12} = 8$ GPa, dan $\nu_{12} = 0,25$. Dengan menggunakan asumsi tegangan bidang, tentukan tegangan yang bekerja pada lamina tersebut jika lamina tersebut mengalami regangan berupa $\varepsilon_1 = 0,001$, $\varepsilon_2 = 0$, dan $\gamma_{12} = 0,0005$.
-
-

BAB IV

LAMINA PADA SISTEM KOORDINAT GLOBAL

Pada Bab III, kita sudah membahas konsep makromekanika lamina, yaitu lamina tersebut menerima beban pada arah 1, arah 2, dan arah 3. Arah 1 merupakan arah yang searah dengan arah serat, sedangkan arah 2 dan 3 merupakan arah yang tegak lurus dengan arah serat. Pada Bab I, kita juga sudah membahas bahwa karena lamina relatif jauh lebih lemah pada arah 2 dan 3, lamina tersebut disusun menjadi laminat dengan arah serat yang berbeda-beda.



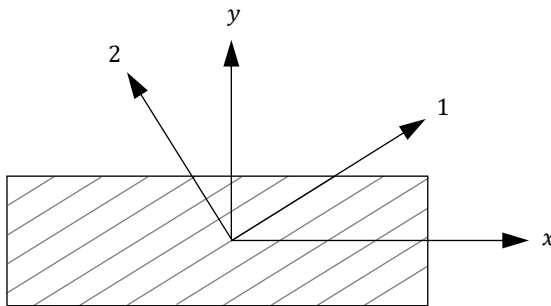
Gambar 4.1 Peta Konsep Bab IV

Artinya, ketika laminat tersebut ditarik, terdapat lamina yang menerima tarikan bukan pada arah seratnya ataupun pada arah yang tegak lurus dengan arah seratnya.

Peta konsep Bab IV ditunjukkan pada Gambar 4.1. Pada bab ini, ketika lamina menerima gaya luar yang tidak searah atau tidak tegak lurus dengan arah seratnya, kita akan menentukan regangan yang dialami oleh lamina tersebut. Kemudian, nantinya kita juga akan bisa menentukan tegangan dan regangan yang dialami oleh lamina tersebut pada arah seratnya dan pada arah yang tegak lurus dengan seratnya.

A. Sistem Koordinat Global

Berdasarkan Gambar 4.2, ketika lamina ditarik pada arah x , untuk menganalisis respons dari lamina tersebut, kita juga perlu mengetahui tegangan dan regangan yang dialami oleh lamina tersebut pada arah 1, 2, dan 3. Sistem koordinat xyz pada Gambar 4.2 disebut sebagai *sistem koordinat global*. Pada gambar tersebut, arah 1 dan sumbu z tegak lurus keluar bidang kertas. Pada bab ini, kita akan membahas cara mentransformasikan tegangan dan regangan dari sistem koordinat global ke sistem koordinat utama atau sebaliknya.

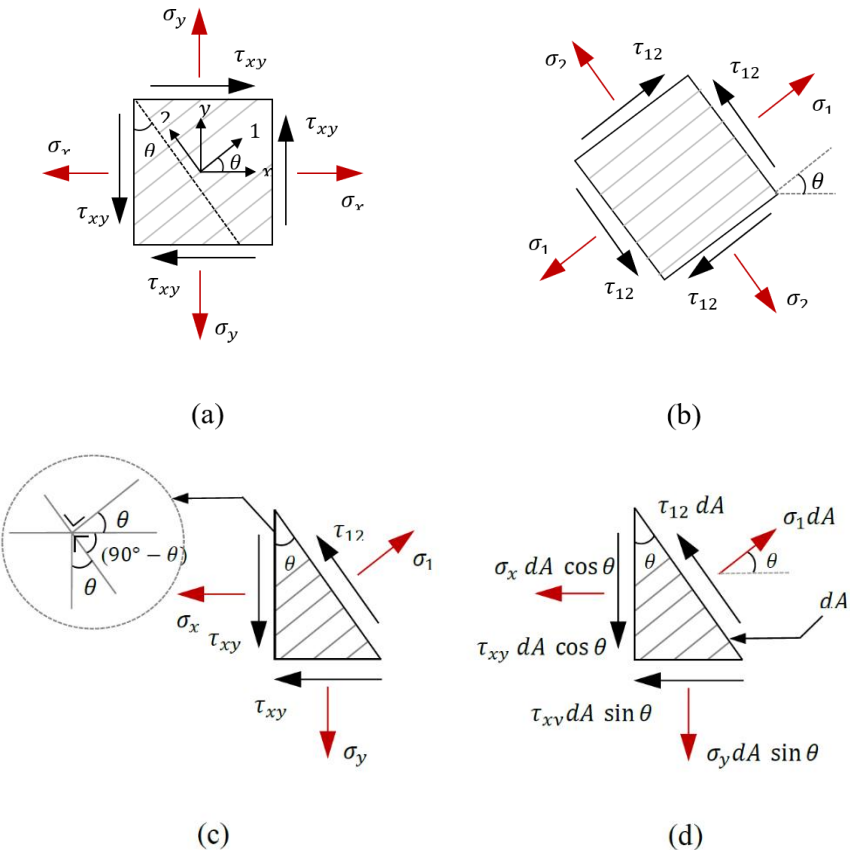


Gambar 4.2 Sistem Koordinat Utama dan Sistem Koordinat Global

B. Transformasi Tegangan

Untuk menentukan cara mentransformasikan tegangan dari sistem koordinat global ke sistem koordinat utama, mari kita tinjau elemen lamina seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.3a. Berdasarkan gambar tersebut, dapat dilihat bahwa arah 1 membentuk sudut θ terhadap sumbu x positif.

Kemudian, misalkan elemen lamina yang ditunjukkan pada Gambar 4.3b merupakan elemen lamina dengan arah serat yang sama dengan elemen lamina pada Gambar 4.3a, tetapi permukaan bawahnya membentuk sudut θ dengan sumbu x . Berdasarkan gambar tersebut, dapat dilihat bahwa tegangan geser yang bekerja merupakan tegangan geser τ_{12} . Dengan demikian, kalau kita meninjau potongan elemen lamina pada Gambar 4.3a seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.3c, tegangan normal dan tegangan geser yang bekerja pada permukaan miring potongan elemen lamina tersebut secara berturut-turut adalah σ_1 dan τ_{12} . Selain itu, misalkan luas permukaan miring pada gambar tersebut adalah dA maka luas permukaan yang tegak lurus dengan sumbu x adalah $dA \cos \theta$ dan luas permukaan yang tegak lurus dengan sumbu y adalah $dA \sin \theta$ sehingga gaya-gaya yang bekerja pada potongan elemen lamina tersebut adalah seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.3d.



Keterangan: (a) Arah Serat Lamina dengan Sudut θ terhadap Sumbu x , (b) Permukaan-Permukaan Lamina yang Tegak Lurus dan Sejajar dengan Arah 1, (c) Potongan Elemen Lamina pada Gambar 4.3a, dan (d) Gaya-Gaya yang Bekerja pada Potongan Elemen Lamina

Gambar 4.3 Sketsa Elemen Lamina untuk Transformasi Tegangan

Buku ini tidak diperjualbelikan.

Dengan menerapkan hukum 1 Newton pada elemen material yang ditunjukkan pada Gambar 4.3d, pada arah x dapat dituliskan bahwa

$$\sum F_x = 0,$$

$$\sigma_1 dA \cos \theta - \tau_{12} dA \sin \theta - \sigma_x dA \cos \theta - \tau_{xy} dA \sin \theta = 0,$$

$$\sigma_1 \cos \theta - \tau_{12} \sin \theta - \sigma_x \cos \theta - \tau_{xy} \sin \theta = 0. \quad (4.1)$$

Kemudian, pada arah y , dapat dituliskan bahwa

$$\sum F_y = 0,$$

$$\sigma_1 dA \sin \theta + \tau_{12} dA \cos \theta - \sigma_y dA \sin \theta - \tau_{xy} dA \cos \theta = 0,$$

$$\sigma_1 \sin \theta + \tau_{12} \cos \theta - \sigma_y \sin \theta - \tau_{xy} \cos \theta = 0. \quad (4.2)$$

Untuk menentukan σ_1 , kita perlu mengalikan persamaan (4.1) dengan $\cos \theta$ dan persamaan (4.2) dengan $\sin \theta$. Secara berturut-turut, hasil perkalian tersebut diberikan oleh

$$\sigma_1 \cos^2 \theta - \tau_{12} \sin \theta \cos \theta - \sigma_x \cos^2 \theta - \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta = 0, \quad (4.3)$$

$$\sigma_1 \sin^2 \theta + \tau_{12} \sin \theta \cos \theta - \sigma_y \sin^2 \theta - \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (4.4)$$

Selanjutnya, dengan menjumlahkan kedua persamaan di atas, diperoleh

$$\sigma_1 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - \sigma_x \cos^2 \theta - \sigma_y \sin^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (4.5)$$

Karena $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ dan dengan memindahkan suku kedua, ketiga, dan keempat pada persamaan (4.5) ke ruas kanan, tegangan σ_1 dapat ditulis sebagai

$$\sigma_1 = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta. \quad (4.6)$$

Kemudian, untuk menentukan rumusan τ_{12} , kita perlu mengalikan persamaan (4.1) dengan $\sin \theta$ dan persamaan (4.2) dengan $-\cos \theta$. Hasilnya secara berturut-turut diberikan oleh

$$\sigma_1 \sin \theta \cos \theta - \tau_{12} \sin^2 \theta - \sigma_x \sin \theta \cos \theta - \tau_{xy} \sin^2 \theta = 0, \quad (4.7)$$

$$-\sigma_1 \sin \theta \cos \theta - \tau_{12} \cos^2 \theta + \sigma_y \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} \cos^2 \theta = 0. \quad (4.8)$$

Dengan menjumlahkan kedua persamaan di atas, diperoleh

$$\begin{aligned}
 & -\tau_{12} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + (-\sigma_x + \sigma_y) \sin \theta \cos \theta \\
 & + \tau_{xy} (-\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 0.
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Dengan demikian, karena $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ dan dengan memindahkan suku kedua dan ketiga pada persamaan (4.9) ke ruas kanan, tegangan τ_{12} dapat ditulis sebagai

$$\tau_{12} = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta + \sigma_y \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \tag{4.10}$$

Kemudian, perhatikan bahwa tegangan pada arah 2, yaitu σ_2 , dapat dirumuskan dengan cara mengganti θ menjadi $(90^\circ + \theta)$ pada persamaan (4.6). Dengan demikian, karena $\cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta$ dan $\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta$, σ_2 dapat ditulis sebagai

$$\sigma_2 = \sigma_x \cos^2(90^\circ + \theta) + \sigma_y \sin^2(90^\circ + \theta) + 2\tau_{xy} \sin(90^\circ + \theta) \cos(90^\circ + \theta)$$

maka

$$\sigma_2 = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta. \tag{4.11}$$

Dengan demikian, hubungan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} dengan σ_x , σ_y , dan τ_{xy} dapat ditulis ke dalam bentuk yang lebih padu berdasarkan persamaan (4.6), (4.10), dan (4.11), yaitu

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}. \tag{4.12}$$

Matriks 3×3 pada ruas kanan persamaan di atas disebut sebagai matriks transformasi. Matriks transformasi tersebut disimbolkan sebagai matriks T dan biasanya ditulis sebagai

$$T = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}, \tag{4.13}$$

dengan $m = \cos \theta$ dan $n = \sin \theta$. Dengan demikian, persamaan (4.12) juga bisa ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

atau

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Berdasarkan persamaan (4.12), (4.14), atau (4.15), jika tegangan pada sistem koordinat global diketahui, tegangan pada sistem koordinat utama dapat ditentukan. Kemudian, jika persamaan (4.14) atau (4.15) dikalikan dengan T^{-1} , diperoleh

$$T^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = T^{-1} T \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

atau

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

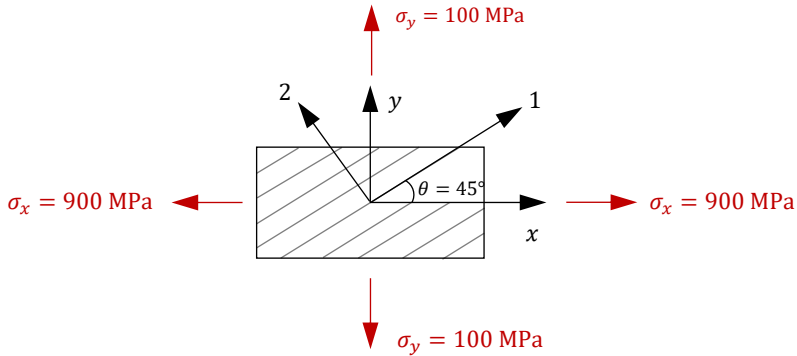
dengan

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Cara penentuan T^{-1} pada persamaan (4.18) adalah di luar cakupan buku ini. Berdasarkan persamaan (4.17), jika tegangan pada sistem koordinat utama diketahui, tegangan pada sistem koordinat global dapat ditentukan.

Contoh 4.1

Misalkan sebuah lamina menerima tegangan seperti ditunjukkan pada gambar berikut. Tentukan tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} yang dialami oleh lamina tersebut.



Jawab

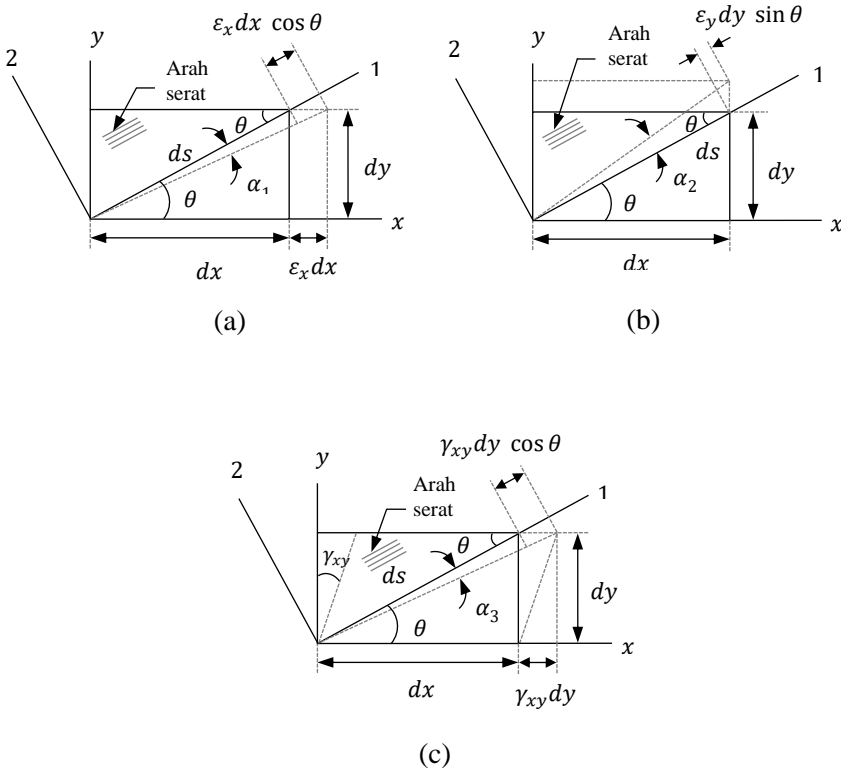
Karena $m = \cos(45^\circ)$ dan $n = \sin(45^\circ)$, berdasarkan persamaan (4.15), tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} yang bekerja pada sistem koordinat utama adalah

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 900 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ MPa} \\ &= \begin{bmatrix} 500 \\ 500 \\ -400 \end{bmatrix} \text{ MPa.} \end{aligned}$$

Terlihat bahwa meskipun $\tau_{xy} = 0$, $\tau_{12} = -400 \text{ MPa}$.

C. Transformasi Regangan

Untuk menentukan cara mentransformasikan regangan dari sistem koordinat global ke sistem koordinat utama, mari kita tinjau elemen lamina seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.4a. Berdasarkan gambar tersebut, dapat dilihat bahwa garis diagonal elemen berimpit dengan sumbu 1.



Keterangan: (a) Regangan pada Arah x , (b) Regangan pada Arah y , dan (c) Regangan Geser
Gambar 4.4 Elemen Lamina yang Mengalami Regangan pada Berbagai Arah

Ketika elemen lamina mengalami perubahan panjang pada sumbu x , jika regangannya pada arah tersebut adalah ϵ_x , perubahan panjang elemen tersebut adalah $\Delta(dx)$, yaitu

$$\Delta(dx) = \epsilon_x dx. \tag{4.19}$$

Dengan demikian, berdasarkan Gambar 4.4a, dapat dilihat bahwa perubahan panjang diagonal dari elemen tersebut akibat regangan pada arah x adalah $\Delta(ds)_x$, yaitu

$$\Delta(ds)_x = \epsilon_x dx \cos \theta. \tag{4.20}$$

Kemudian, mari tinjau elemen lamina ketika mengalami regangan pada arah y seperti ditunjukkan pada Gambar 4.4b. Jika regangannya pada arah tersebut adalah ϵ_y , perubahan panjang elemen tersebut adalah $\Delta(dy)$, yaitu

$$\Delta(dy) = \epsilon_y dy. \tag{4.21}$$

Dengan demikian, berdasarkan Gambar 4.4b, dapat dilihat bahwa perubahan panjang diagonal dari elemen tersebut akibat regangan pada arah y adalah $\Delta(ds)_y$, yaitu

$$\Delta(ds)_y = \varepsilon_y dy \sin \theta. \quad (4.22)$$

Selanjutnya, mari tinjau elemen lamina yang mengalami regangan geser γ_{xy} seperti ditunjukkan pada Gambar 4.4c. Akibat regangan geser tersebut, permukaan bagian atas dari elemen bergerak ke kanan sejauh $\Delta\gamma_{xy}$. Untuk sudut yang kecil, $\gamma_{xy} = \tan \gamma_{xy}$ sehingga dapat dituliskan bahwa $\gamma_{xy} = \Delta\gamma_{xy}/dy$ atau

$$\Delta\gamma_{xy} = \gamma_{xy} dy. \quad (4.23)$$

Dengan demikian, berdasarkan Gambar 4.4c, dapat dilihat bahwa perubahan panjang diagonal elemen akibat regangan geser γ_{xy} adalah $\Delta(ds)_{xy}$, yaitu

$$\Delta(ds)_{xy} = \gamma_{xy} dy \cos \theta. \quad (4.24)$$

Ketika elemen lamina mengalami regangan ε_x , ε_y , dan γ_{xy} , perubahan panjang diagonal total yang dialami oleh elemen tersebut adalah Δd , yaitu

$$\Delta d = \Delta(ds)_x + \Delta(ds)_y + \Delta(ds)_{xy}$$

maka

$$\Delta d = \varepsilon_x dx \cos \theta + \varepsilon_y dy \sin \theta + \gamma_{xy} dy \cos \theta. \quad (4.25)$$

Kemudian, perhatikan bahwa regangan normal pada arah 1 sama dengan perubahan panjang diagonal dibagi dengan panjang diagonal awal. Dengan demikian, berdasarkan persamaan (4.25), jika regangan normal pada arah 1 adalah ε_1 , dapat dituliskan bahwa

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta d}{ds} = \frac{\varepsilon_x dx \cos \theta + \varepsilon_y dy \sin \theta + \gamma_{xy} dy \cos \theta}{ds}$$

maka

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x \frac{dx}{ds} \cos \theta + \varepsilon_y \frac{dy}{ds} \sin \theta + \gamma_{xy} \frac{dy}{ds} \cos \theta. \quad (4.26)$$

Berdasarkan Gambar 4.4a, terlihat bahwa $dx/ds = \cos \theta$ dan $dy/ds = \sin \theta$. Dengan demikian, persamaan (4.26) dapat ditulis sebagai

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta. \quad (4.27)$$

Persamaan (4.27) menunjukkan regangan pada arah 1 yang dialami oleh elemen lamina ketika elemen lamina tersebut mengalami regangan ϵ_x , ϵ_y , dan γ_{xy} .

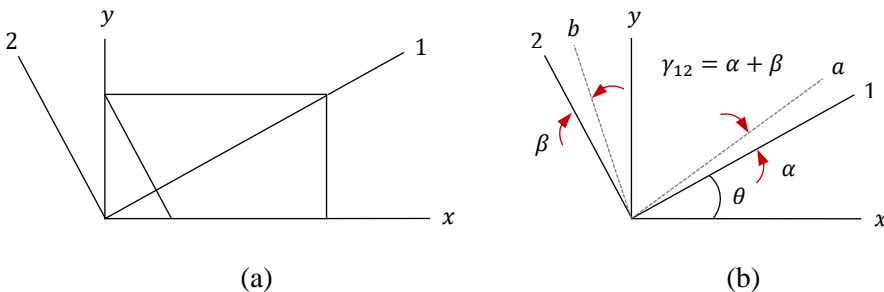
Untuk menentukan regangan pada arah 2, yaitu ϵ_2 , dapat dilakukan dengan cara mengubah θ pada persamaan (4.27) menjadi $(90^\circ + \theta)$. Dengan demikian, karena $\cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta$ dan $\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta$, dapat dituliskan bahwa

$$\epsilon_2 = \epsilon_x \sin^2 \theta + \epsilon_y \cos^2 \theta - \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta. \quad (4.28)$$

Persamaan (4.28) menunjukkan regangan pada arah 2 yang dialami oleh elemen lamina ketika elemen lamina tersebut mengalami regangan ϵ_x , ϵ_y , dan γ_{xy} .

Untuk menentukan regangan geser γ_{12} , perhatikan bahwa pada Gambar 4.4, regangan ϵ_x dan regangan geser γ_{xy} menyebabkan garis diagonal lamina berotasi pada arah putaran jarum jam. Sementara itu, regangan ϵ_y menyebabkan garis diagonal elemen lamina berotasi pada arah yang berlawanan dengan putaran jarum jam. Jika elemen lamina tersebut mengalami regangan ϵ_x , ϵ_y , dan γ_{xy} secara bersamaan, diagonal dari elemen tersebut berotasi pada arah yang berlawanan dengan putaran jarum jam sehingga garis tersebut membentuk sudut α seperti ditunjukkan pada Gambar 4.5b.

Kemudian, perhatikan bahwa regangan ϵ_x dan regangan geser γ_{xy} menyebabkan garis yang sejajar dengan sumbu 2 pada Gambar 4.5a berotasi pada arah yang berlawanan dengan putaran jarum jam, sedangkan regangan ϵ_y menyebabkan garis tersebut berotasi pada arah putaran jarum jam. Jika elemen lamina tersebut mengalami regangan ϵ_x , ϵ_y , dan γ_{xy} secara bersamaan, garis tersebut berotasi pada arah yang berlawanan dengan putaran jarum jam sehingga garis tersebut membentuk sudut β seperti ditunjukkan pada Gambar 4.5b.



Keterangan: (a) Garis yang Sejajar dengan Sumbu 2 pada Elemen Lamina, dan (b) Regangan Geser yang Dialami Lamina Relatif terhadap Sistem Koordinat Utama

Gambar 4.5 Rotasi Garis Diagonal Elemen Lamina Akibat Regangan

Berdasarkan Gambar 4.5b, dapat dilihat bahwa regangan geser yang dialami elemen lamina relatif terhadap bidang 12 adalah γ_{12} , yaitu

$$\gamma_{12} = \alpha + \beta \quad (4.29)$$

Sekarang, mari kita tentukan tentukan sudut α terlebih dahulu. Berdasarkan Gambar 4.4a, regangan ε_x menyebabkan garis diagonal elemen berotasi sebesar α_1 . Dengan aproksimasi sudut kecil, dapat dituliskan bahwa

$$\alpha_1 = \tan \alpha_1 = \frac{\varepsilon_x dx \sin \theta}{ds}$$

maka

$$\alpha_1 = \varepsilon_x \frac{dx}{ds} \sin \theta, \quad (4.30)$$

dengan $\varepsilon_x dx \sin \theta$ adalah panjang sisi yang berada di depan sudut α_1 . Kemudian, berdasarkan Gambar 4.4.b, regangan ε_y menyebabkan garis diagonal elemen berotasi sebesar α_2 . Dengan cara yang sama, dapat dituliskan bahwa

$$\alpha_2 = \tan \alpha_2 = \frac{\varepsilon_y dy \cos \theta}{ds}$$

maka

$$\alpha_2 = \varepsilon_y \frac{dy}{ds} \cos \theta, \quad (4.31)$$

dengan $\varepsilon_y dy \cos \theta$ adalah panjang sisi yang berada di depan sudut α_2 . Kemudian, berdasarkan Gambar 4.4c, regangan γ_{xy} menyebabkan garis diagonal elemen berotasi sebesar α_3 sehingga

$$\alpha_3 = \tan \alpha_3 = \frac{\gamma_{xy} dy \sin \theta}{ds}$$

maka

$$\alpha_3 = \gamma_{xy} \frac{dy}{ds} \sin \theta, \quad (4.32)$$

dengan $\gamma_{xy} dy \sin \theta$ adalah panjang sisi yang berada di depan sudut α_3 . Dengan demikian, dengan menjadikan arah yang berlawanan arah dengan putaran jarum jam sebagai arah positif, dapat dituliskan bahwa

$$\alpha = -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$$

maka

$$\alpha = -\varepsilon_x \frac{dx}{ds} \sin \theta + \varepsilon_y \frac{dy}{ds} \cos \theta - \gamma_{xy} \frac{dy}{ds} \sin \theta. \quad (4.33)$$

Karena $dx/ds = \cos \theta$ dan $dy/ds = \sin \theta$,

$$\alpha = -\varepsilon_x \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_y \sin \theta \cos \theta - \gamma_{xy} \sin^2 \theta. \quad (4.34)$$

Untuk menentukan sudut β , perhatikan bahwa garis yang sejajar dengan sumbu 2 pada Gambar 4.5a sama dengan garis diagonal yang sejajar dengan sumbu 1 yang dirotasikan sebesar 90° pada arah yang berlawanan dengan putaran jarum jam. Dengan demikian, sudut β dapat ditentukan dengan menjadikan θ pada persamaan (4.34) menjadi $(90^\circ + \theta)$. Karena $\cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta$ dan $\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta$, dapat dituliskna bahwa

$$\beta = -\varepsilon_x \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_y \sin \theta \cos \theta + \gamma_{xy} \cos^2 \theta. \quad (4.35)$$

Dengan demikian, regangan geser γ_{12} yang dialami oleh elemen lamina adalah

$$\gamma_{12} = \alpha + \beta,$$

maka

$$\gamma_{12} = -2\varepsilon_x \sin \theta \cos \theta + 2\varepsilon_y \sin \theta \cos \theta + \gamma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \quad (4.36)$$

Untuk menuliskan regangan ε_1 , ε_2 , dan γ_{12} dalam bentuk yang padu, perhatikan bahwa persamaan (4.27), (4.28), dan (4.36) dapat ditulis dalam bentuk yang sedikit berbeda sebagai

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + 2 \left(\frac{1}{2} \gamma_{xy} \right) \sin \theta \cos \theta; \quad (4.37)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_x \sin^2 \theta + \varepsilon_y \cos^2 \theta - 2 \left(\frac{1}{2} \gamma_{xy} \right) \sin \theta \cos \theta; \quad (4.38)$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{12} = -\varepsilon_x \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_y \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \gamma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \quad (4.39)$$

Dengan demikian, karena $m = \cos \theta$ dan $n = \sin \theta$, persamaan (4.37), (4.38), dan (4.39) dapat ditulis sebagai

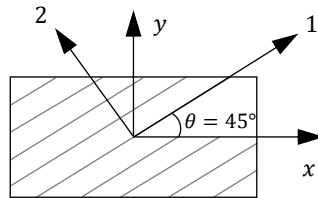
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

Berdasarkan persamaan (4.40), dapat dilihat bahwa jika regangan pada sistem koordinat global diketahui, regangan pada sistem koordinat utama dapat ditentukan. Kemudian, berdasarkan persamaan (4.13), persamaan (4.40) juga dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

Contoh 4.2

Misalkan lamina pada gambar berikut mengalami regangan dengan $\varepsilon_x = 0,015$, $\varepsilon_y = 0$, dan $\gamma_{xy} = 0$. Tentukan regangan ε_1 , ε_2 , dan γ_{12} yang dialami lamina tersebut.



Jawab

Karena $m = \cos(45^\circ)$ dan $n = \sin(45^\circ)$, berdasarkan persamaan (4.40), regangan pada sistem koordinat utama adalah

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,015 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,0075 \\ 0,0075 \\ -0,0075 \end{bmatrix}$$

Dengan mengalikan baris ketiga dengan 2, regangan ε_1 , ε_2 , dan γ_{12} yang dialami lamina adalah

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0075 \\ 0,0075 \\ -0,0150 \end{bmatrix}.$$

Terlihat bahwa meskipun ε_y dan γ_{xy} sama dengan nol, $\varepsilon_1 = 0,0075$ dan $\gamma_{12} = -0,0150$.

D. Matriks Komplian Tereduksi yang Ditransformasi

Perhatikan bahwa hubungan antara tegangan dan regangan pada sistem koordinat utama yang diberikan oleh persamaan (3.57) dapat ditulis dalam bentuk yang sedikit berbeda, yaitu

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

Baris ketiga yang pada awalnya adalah $\gamma_{12} = S_{66}\tau_{12}$ diubah sebagai $(1/2)\gamma_{12} = (1/2)S_{66}\tau_{12}$. Berdasarkan persamaan (4.14) dan (4.41), persamaan (4.42) juga dapat ditulis sebagai

$$T \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}S_{66} \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

Kemudian, dengan mengalikan kedua ruas persamaan di atas dengan T^{-1} , dapat dituliskan bahwa

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}S_{66} \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}. \quad (4.44)$$

Dengan mengalikan baris ketiga persamaan (4.44) dengan 2, diperoleh

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

sehingga

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Adapun

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} T. \quad (4.46)$$

Dalam hal ini,

$$\bar{S}_{11} = S_{11}m^4 + (2S_{12} + S_{66})n^2m^2 + S_{22}n^4, \quad (4.47)$$

$$\bar{S}_{12} = (S_{11} + S_{22} - S_{66})n^2m^2 + S_{12}(n^4 + m^4), \quad (4.48)$$

$$\bar{S}_{16} = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})nm^3 - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66})n^3m, \quad (4.49)$$

$$\bar{S}_{22} = S_{11}n^4 + (2S_{12} + S_{66})n^2m^2 + S_{22}m^4, \quad (4.50)$$

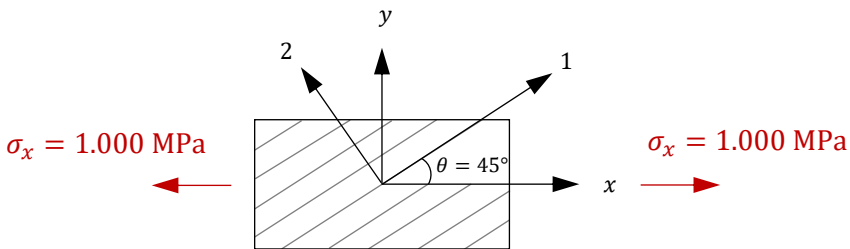
$$\bar{S}_{26} = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})n^3m - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66})nm^3, \quad (4.51)$$

$$\bar{S}_{66} = 2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66})n^2m^2 + S_{66}(n^4 + m^4). \quad (4.52)$$

Matriks 3×3 pada persamaan (4.45) disebut sebagai matriks *komplian tereduksi yang ditransformasi*. Berdasarkan persamaan tersebut, jika tegangan pada sistem koordinat global diketahui, regangan pada sistem koordinat tersebut dapat ditentukan.

Contoh 4.3

Misalkan sebuah lamina menerima tegangan seperti ditunjukkan pada Gambar berikut. Jika lamina tersebut memiliki sifat dengan $E_1 = 45 \text{ GPa}$, $E_2 = 10 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0,25$, dan $G_{12} = 5 \text{ GPa}$, tentukan regangan ϵ_x , ϵ_y , dan γ_{xy} yang dialami lamina tersebut.



Jawab

Untuk menentukan regangan ϵ_x , ϵ_y , dan γ_{xy} yang dialami oleh lamina, kita perlu terlebih dahulu untuk menentukan matriks komplian tereduksi dari lamina tersebut. Berdasarkan persamaan (3.54), komponen-komponen matriks komplian tereduksi adalah

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} = \frac{1}{45 \text{ GPa}} = 2,22 \times 10^{-11} \text{ Pa}^{-1},$$

$$S_{22} = \frac{1}{E_2} = \frac{1}{10 \text{ GPa}} = 1,00 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1},$$

$$S_{66} = \frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{5 \text{ GPa}} = 2,00 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1},$$

$$S_{12} = \frac{-\nu_{12}}{E_1} = \frac{-0,25}{45 \text{ GPa}} = -5,56 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}.$$

Buku ini tidak diperjualbelikan.

Dengan demikian, karena $m = \cos(45^\circ)$ dan $n = \sin(45^\circ)$, berdasarkan persamaan (4.47)–(4.52), komponen-komponen matriks komplan tereduksi yang ditransformasi adalah

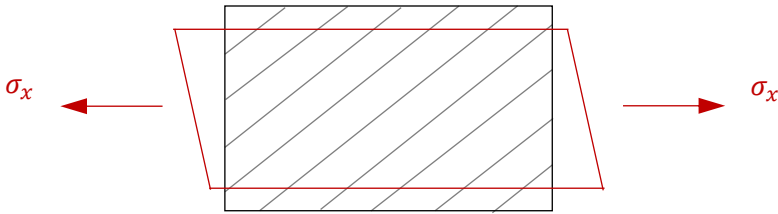
$$\begin{aligned}\bar{S}_{11} &= 7,78 \times 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}, \\ \bar{S}_{12} &= -2,22 \times 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}, \\ \bar{S}_{16} &= -3,89 \times 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}, \\ \bar{S}_{22} &= 7,78 \times 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}, \\ \bar{S}_{26} &= -3,89 \times 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}, \\ \bar{S}_{66} &= 13,33 \times 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}.\end{aligned}$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (4.45), regangan yang dialami lamina adalah

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 7,78 & -2,22 & -3,89 \\ -2,22 & 7,78 & -3,89 \\ -3,89 & -3,89 & 13,33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10^9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{-11} \\ &= \begin{bmatrix} 0,078 \\ -0,022 \\ -0,039 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Terlihat bahwa tegangan σ_x juga menghasilkan regangan geser akibat adanya komponen \bar{S}_{16} .

Kemudian, berdasarkan persamaan (4.45), dapat dilihat bahwa σ_y juga menyebabkan terjadinya regangan geser akibat komponen \bar{S}_{26} . Selain itu, perhatikan bahwa adanya komponen \bar{S}_{16} dan \bar{S}_{26} menyebabkan τ_{xy} menghasilkan regangan normal. Ini menunjukkan adanya perbedaan respons lamina jika dibandingkan dengan logam yang bersifat isotropik. Pada logam yang bersifat isotropik, tegangan normal tidak menyebabkan terjadinya regangan geser dan tegangan geser tidak menyebabkan terjadinya regangan normal.



Tegangan tarik pada arah x menyebabkan terjadinya regangan geser yang bernilai negatif, maka berdasarkan gambar pada soal, sudut kiri bawah dan sudut kanan atas menjadi bertambah besar. Kemudian, sudut kiri atas dan kanan bawah menjadi bertambah kecil seperti ditunjukkan pada gambar di atas. Karena ε_y bernilai negatif, lamina mengalami pengecilan pada arah y . Regangan ε_y bernilai negatif karena efek Poisson. Kemudian, lamina ditarik pada arah x maka ε_x bernilai positif atau lamina mengalami pemanjangan pada arah tersebut.

Selanjutnya, perhatikan bahwa berdasarkan persamaan (4.47)–(4.52), jika komponen-komponen matriks komplan tereduksi yang ditransformasi dari lamina dengan sifat-sifat seperti yang diberikan pada Contoh (4.3) diplot sebagai fungsi θ , akan seperti ditunjukkan pada gambar a dan b berikut. Gambar a menunjukkan komponen diagonal matriks komplan tereduksi yang ditransformasi sebagai fungsi θ dan gambar b menunjukkan komponen non diagonal matriks komplan tereduksi yang ditransformasi sebagai fungsi θ . Dari kedua gambar tersebut, dapat dilihat bahwa \bar{S}_{12} dan komponen diagonal yang lain merupakan fungsi genap, sedangkan, \bar{S}_{16} dan \bar{S}_{26} merupakan fungsi ganjil. Dengan demikian, dapat dituliskan bahwa

$$\bar{S}_{12}(\theta) = \bar{S}_{12}(-\theta),$$

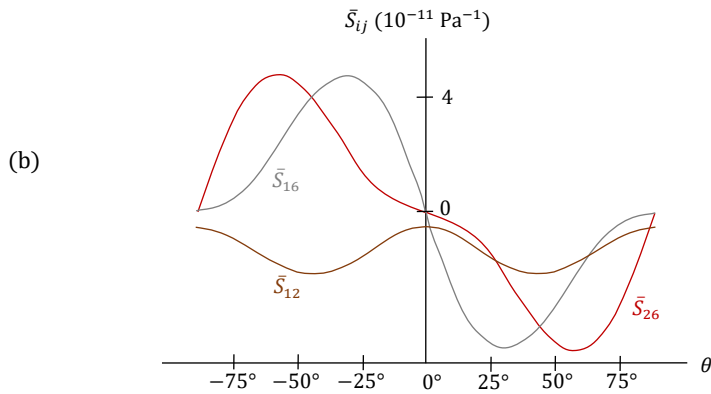
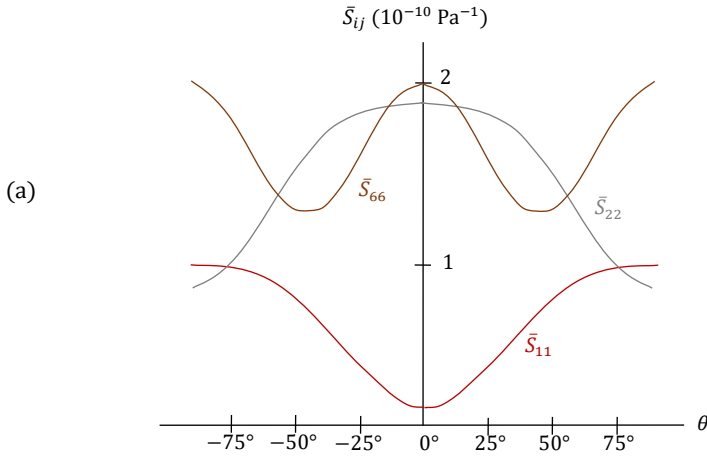
$$\bar{S}_{11}(\theta) = \bar{S}_{11}(-\theta),$$

$$\bar{S}_{22}(\theta) = \bar{S}_{22}(-\theta),$$

$$\bar{S}_{66}(\theta) = \bar{S}_{66}(-\theta),$$

$$\bar{S}_{16}(\theta) = -\bar{S}_{16}(-\theta),$$

$$\bar{S}_{26}(\theta) = -\bar{S}_{26}(-\theta).$$



Contoh 4.4

Misalkan lamina pada Contoh 4.3 hanya menerima tegangan berupa tegangan geser $\tau_{xy} = 100 \text{ MPa}$. Tentukan regangan ϵ_x , ϵ_y , dan γ_{xy} yang dialami elemen lamina tersebut.

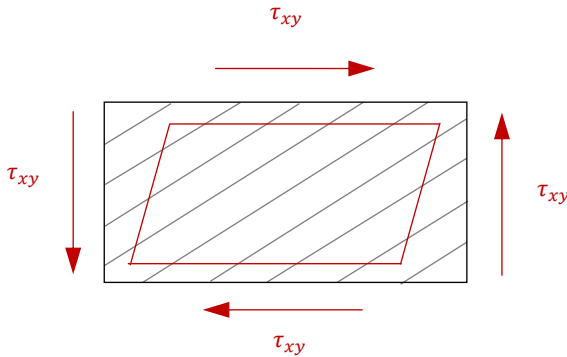
Jawab

Kita sudah mengetahui komponen-komponen matriks komplan tereduksi yang ditransformasi pada Contoh 4.3. Dengan demikian, berdasarkan persamaan (4.45), regangan yang dialami oleh elemen lamina adalah

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,47 & -1,69 & -3,95 \\ -1,69 & 8,47 & -3,95 \\ -3,95 & -3,95 & 11,29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10^{-7} \end{bmatrix} \times 10^{-11}$$

$$= \begin{bmatrix} -3,95 \\ -3,95 \\ 0,11 \end{bmatrix} \times 10^{-7}.$$

Dari sini dapat kita lihat bahwa seperti yang sudah kita bahas pada Contoh 4.3, tegangan geser τ_{xy} menyebabkan regangan geser ε_x dan ε_y . Karena tegangan geser yang bernilai positif menyebabkan regangan ε_x dan ε_y bernilai negatif, ini berarti bahwa elemen lamina mengalami pengecilan pada arah x dan y . Kemudian, berdasarkan gambar pada Contoh 4.3, regangan geser yang bernilai positif berarti sudut kiri atas dan kanan bawah dari elemen lamina menjadi bertambah besar, sedangkan sudut kiri bawah dan kanan atas menjadi bertambah kecil. Sketsa deformasi yang terjadi akibat tegangan geser $\tau_{xy} = 100$ MPa ditunjukkan pada gambar berikut.



Contoh 4.5

Berdasarkan persamaan (4.47)–(4.52) tentukan komponen-komponen matriks komplan tereduksi yang ditransformasi pada material yang bersifat isotropik.

Jawab

Pada material isotropik, sifat-sifatnya sama pada semua arah sehingga dapat dituliskan bahwa $E_1 = E_2 = E$, $G_{12} = G$, dan $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu$; dengan E , G , dan ν secara berturut-turut merupakan modulus Young, modulus geser, dan rasio Poisson material tersebut. Berdasarkan persamaan (3.58), dapat ditulis bahwa

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} = \frac{1}{E}; \quad S_{12} = -\frac{\nu}{E};$$

$$S_{22} = \frac{1}{E}; \quad S_{66} = \frac{1}{G}.$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (4.47), komponen \bar{S}_{11} dapat ditulis sebagai

$$\bar{S}_{11} = \frac{1}{E}m^4 + \left(-\frac{2\nu}{E} + \frac{1}{G}\right)n^2m^2 + \frac{1}{E}n^4.$$

Kemudian, perlu diketahui bahwa hubungan antara modulus Young, modulus geser, dan rasio Poisson pada material isotropik diberikan oleh

$$\frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}$$

sehingga dapat dituliskan bahwa

$$\begin{aligned} \bar{S}_{11} &= \frac{1}{E}m^4 + \left[-\frac{2\nu}{E} + \frac{2(1+\nu)}{E}\right]n^2m^2 + \frac{1}{E}n^4 \\ &= \frac{1}{E}(m^4 + n^2m^2 + n^4) = \frac{1}{E}(m^2 + n^2)^2. \end{aligned}$$

Karena $m = \cos \theta$ dan $n = \sin \theta$, ini berarti bahwa $(m^2 + n^2)^2 = 1$. Dengan demikian, komponen \bar{S}_{11} dari material isotropik adalah

$$\bar{S}_{11} = \frac{1}{E}. \quad (a)$$

Pada material isotropik, $S_{11} = S_{22}$ maka berdasarkan persamaan (4.46) dan (4.49), dapat dituliskan bahwa $\bar{S}_{22} = \bar{S}_{11}$ sehingga komponen \bar{S}_{22} pada material isotropik menjadi

$$\bar{S}_{22} = \frac{1}{E}. \quad (b)$$

Selanjutnya, komponen \bar{S}_{12} dapat ditentukan berdasarkan persamaan (4.48), yaitu

$$\begin{aligned}
\bar{S}_{12} &= \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{E} - \frac{1}{G} \right) n^2 m^2 - \frac{\nu}{E} (n^4 + m^4) \\
&= \left[\frac{1}{E} + \frac{1}{E} - \frac{2(1+\nu)}{E} \right] n^2 m^2 - \frac{\nu}{E} (n^4 + m^4) \\
&= -\frac{\nu}{E} (2n^2 m^2 + n^4 + m^4) = -\frac{\nu}{E} (n^2 + m^2)^2 = -\frac{\nu}{E} (1)^2
\end{aligned}$$

maka

$$\bar{S}_{12} = -\frac{\nu}{E}. \quad (c)$$

Komponen \bar{S}_{16} dapat ditentukan berdasarkan persamaan (4.49), yaitu

$$\bar{S}_{16} = \left[\frac{2}{E} - \frac{2\nu}{E} - \frac{2(1+\nu)}{E} \right] nm^3 - \left[\frac{2}{E} - \frac{2\nu}{E} - \frac{2(1+\nu)}{E} \right] n^3 m$$

maka

$$\bar{S}_{16} = 0. \quad (d)$$

Kemudian, karena suku dalam tanda kurung pada persamaan (4.51) bernilai sama dengan suku dalam tanda kurung pada persamaan (4.49), dapat dituliskan bahwa

$$\bar{S}_{26} = \bar{S}_{16} = 0. \quad (d)$$

Selanjutnya, komponen \bar{S}_{66} dapat ditentukan berdasarkan persamaan (4.52), yaitu

$$\begin{aligned}
\bar{S}_{66} &= 2 \left[\frac{2}{E} + \frac{2}{E} - \frac{4\nu}{E} - \frac{2(1+\nu)}{E} \right] n^2 m^2 + \frac{2(1+\nu)}{E} (n^4 + m^4) \\
&= \frac{2(1+\nu)}{E} (2n^2 m^2 + n^4 + m^4) = \frac{2(1+\nu)}{E} (m^2 + n^2)^2
\end{aligned}$$

maka

$$\bar{S}_{66} = \frac{2(1+\nu)}{E}. \quad (e)$$

Perhatikan bahwa berdasarkan komponen-komponen matriks komplan tereduksi yang ditransformasi pada material isotropik yang diberikan oleh persamaan (a)–(e), dapat dituliskan bahwa

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan persamaan (d), terlihat bahwa karena $\bar{S}_{26} = \bar{S}_{16} = 0$, pada material isotropik, tegangan geser tidak menyebabkan regangan normal dan tegangan normal tidak menyebabkan regangan geser. Sementara itu, seperti yang sudah kita bahas sebelumnya, pada lamina yang bersifat ortotropik, tegangan geser menyebabkan regangan normal dan tegangan normal menyebabkan regangan geser. Ini merupakan salah satu perbedaan antara material yang bersifat ortotropik dan material yang bersifat isotropik.

E. Matriks Kekauan Tereduksi yang Ditransformasi

Perhatikan bahwa persamaan (3.66) dapat ditulis ke dalam bentuk yang sedikit berbeda, yaitu

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (4.53)$$

Berdasarkan persamaan (4.14) dan (4.41), dapat dituliskan bahwa

$$T \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2}\tau_{xy} \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

Kemudian, dengan mengalikan kedua ruas persamaan di atas dengan T^{-1} ,

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2}\tau_{xy} \end{bmatrix}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (4.55)$$

yang dalam hal ini,

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix} T, \quad (4.56)$$

dengan

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})n^2m^2 + Q_{22}n^4, \quad (4.57)$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})n^2m^2 + Q_{12}(n^4 + m^4), \quad (4.58)$$

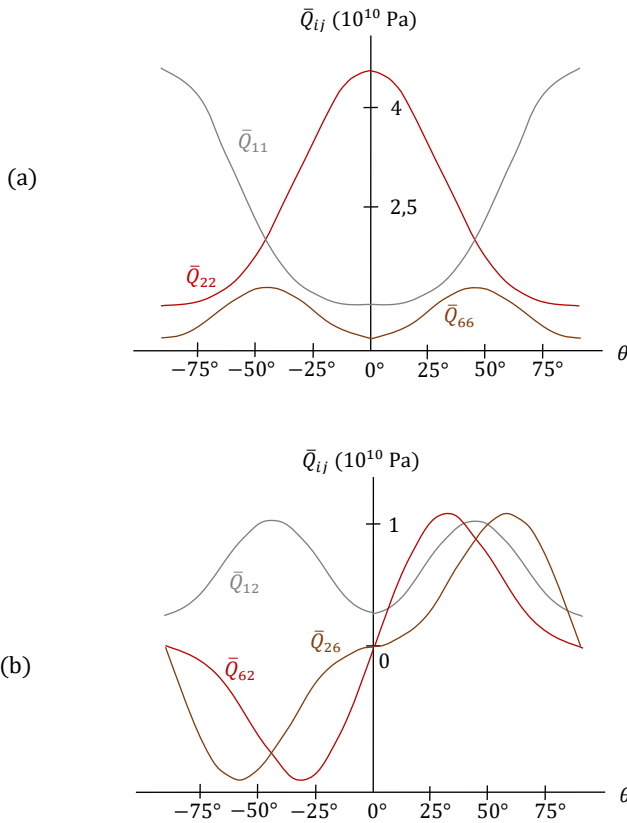
$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})nm^3 - (Q_{12} - Q_{22} - 2Q_{66})n^3m, \quad (4.59)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})n^2m^2 + Q_{22}m^4, \quad (4.60)$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})n^3m + (Q_{12} - Q_{22} - 2Q_{66})nm^3, \quad (4.61)$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 2Q_{66})n^2m^2 + Q_{66}(n^4 + m^4). \quad (4.62)$$

Matriks 3×3 pada persamaan (4.55) disebut sebagai matriks *kekakuan tereduksi yang ditransformasi*. Berdasarkan persamaan (4.55), jika regangan pada sistem koordinat global diketahui, tegangan pada sistem koordinat tersebut dapat ditentukan.



Keterangan: (a) Komponen Bagian Diagonal dan (b) Komponen Bagian Nondiagonal

Gambar 4.6 Komponen-Komponen Matriks Kekakuan Tereduksi yang Ditransformasi sebagai Fungsi θ

Selanjutnya, perhatikan bahwa berdasarkan persamaan (4.57)–(4.63), jika komponen-komponen matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi dari lamina dengan sifat-sifat seperti yang diberikan pada Contoh 4.3 diplot sebagai fungsi θ , akan tampak seperti ditunjukkan pada Gambar 4.6a dan 4.6b. Gambar 4.6a menunjukkan komponen diagonal matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi sebagai fungsi θ dan Gambar 4.6b menunjukkan komponen nondiagonal matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi sebagai fungsi θ .

Seperti komponen-komponen matriks komplian tereduksi yang ditransformasi, dari Gambar 4.6a dan 4.6b dapat dilihat bahwa \bar{Q}_{12} dan komponen diagonal yang lain merupakan fungsi genap. Sementara itu, \bar{Q}_{16} dan \bar{Q}_{26} merupakan fungsi ganjil. Dengan demikian, dapat dituliskan bahwa

$$\bar{Q}_{12}(\theta) = \bar{Q}_{12}(-\theta),$$

$$\bar{Q}_{11}(\theta) = \bar{Q}_{11}(-\theta),$$

$$\bar{Q}_{22}(\theta) = \bar{Q}_{22}(-\theta),$$

$$\bar{Q}_{66}(\theta) = \bar{Q}_{66}(-\theta);$$

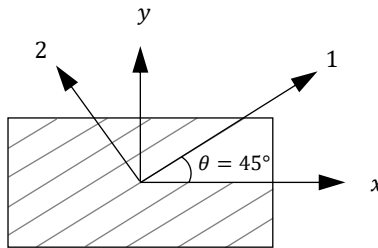
dan

$$\bar{Q}_{16}(\theta) = -\bar{Q}_{16}(-\theta),$$

$$\bar{Q}_{26}(\theta) = -\bar{Q}_{26}(-\theta).$$

Contoh 4.6

Misalkan elemen lamina pada gambar berikut mengalami regangan berupa $\varepsilon_x = 10^{-6}$, $\varepsilon_y = 2 \times 10^{-7}$, dan $\gamma_{xy} = 3 \times 10^{-9}$. Jika lamina tersebut memiliki sifat dengan $E_1 = 55$ GPa, $E_2 = 15$ GPa, $\nu_{12} = 0,25$, dan $G_{12} = 7$ GPa, tentukan tegangan σ_x , σ_y , dan τ_{xy} yang bekerja pada lamina tersebut.



Jawab

Untuk menentukan regangan yang dialami oleh lamina, kita perlu terlebih dahulu menentukan matriks komplian tereduksi dari lamina tersebut. Sebagai implikasi dari teorema Maxwell-Betti, kita bisa menuliskan bahwa

$$\begin{aligned} \nu_{21} &= \frac{\nu_{12}}{E_1} E_2 = \frac{(0,25)}{(55 \text{ GPa})} (15 \text{ GPa}) \\ &= 0,07. \end{aligned}$$

Selanjutnya, berdasarkan persamaan (3.71)–(3.74), komponen-komponen matriks komplian tereduksi adalah

$$Q_{11} = \frac{55 \text{ GPa}}{1 - (0,25)(0,07)} = 55,95 \times 10^9 \text{ Pa},$$

$$Q_{12} = \frac{(0,25)(55 \text{ GPa})}{1 - (0,25)(0,07)} = 3,82 \times 10^9 \text{ Pa},$$

$$Q_{22} = \frac{(15 \text{ GPa})}{1 - (0,25)(0,07)} = 15,26 \times 10^9 \text{ Pa},$$

$$Q_{66} = 7 \text{ GPa} = 7 \times 10^9 \text{ Pa}.$$

Kemudian, karena $m = \cos(45^\circ)$ dan $n = \sin(45^\circ)$, berdasarkan persamaan (4.57)–(4.62), komponen-komponen matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi adalah

$$\bar{Q}_{11} = 3,91 \times 10^{10} \text{ Pa},$$

$$\bar{Q}_{12} = 1,05 \times 10^{10} \text{ Pa},$$

$$\bar{Q}_{16} = 1,27 \times 10^{10} \text{ Pa},$$

$$\bar{Q}_{22} = 1,88 \times 10^{10} \text{ Pa},$$

$$\bar{Q}_{26} = 0,50 \times 10^{10} \text{ Pa},$$

$$\bar{Q}_{66} = 1,37 \times 10^{10} \text{ Pa}.$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (4.55), tegangan σ_x , σ_y , dan τ_{xy} yang bekerja pada elemen lamina adalah

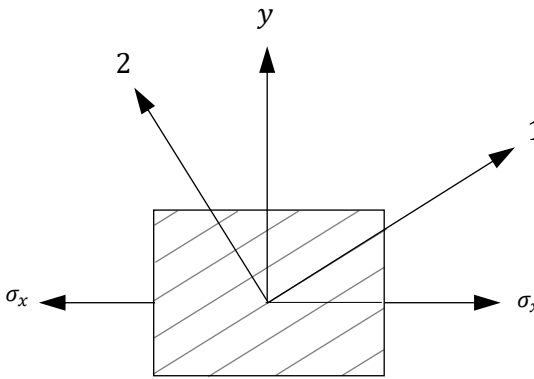
$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,67 & 1,27 & 1,02 \\ 1,27 & 2,67 & 1,02 \\ 1,02 & 1,02 & 1,60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10^{-6} \\ 2 \times 10^{-7} \\ 3 \times 10^{-9} \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

$$= \begin{bmatrix} 29.284 \\ 18.084 \\ 12.256 \end{bmatrix} \text{ Pa}.$$

F. Modulus Young pada Sistem Koordinat Global

Misalkan sebuah elemen lamina hanya menerima tarikan pada arah x seperti ditunjukkan pada Gambar 4.7. Akibatnya, elemen tersebut mengalami regangan pada arah x . Dengan demikian, tingkat elastisitas elemen lamina pada arah tersebut ditunjukkan oleh modulus Young yang memberikan hubungan antara tegangan σ_x dan regangan ε_x . Berdasarkan persamaan (4.44), regangan ε_x dapat ditulis sebagai

$$\varepsilon_x = \bar{S}_{11}\sigma_x + \bar{S}_{12}\sigma_y + \bar{S}_{16}\tau_{xy}. \quad (4.63)$$



Gambar 4.7 Elemen Lamina yang Menerima Tarikan pada Arah x

Karena elemen lamina hanya menerima tegangan σ_x , ini berarti bahwa σ_y dan τ_{xy} sama dengan nol sehingga persamaan (4.63) menjadi

$$\varepsilon_x = \bar{S}_{11}\sigma_x. \quad (4.64)$$

Kemudian, berdasarkan definisi modulus Young, dapat dituliskan bahwa $\varepsilon_x = \sigma_x/E_x$ sehingga berdasarkan persamaan (4.64), dapat dituliskan bahwa

$$\begin{aligned} \bar{S}_{11}\sigma_x &= \frac{\sigma_x}{E_x}; \\ E_x &= \frac{1}{\bar{S}_{11}}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Dengan menyubstitusikan persamaan (4.47) ke persamaan (4.65), diperoleh

$$E_x = \frac{1}{S_{11}m^4 + (2S_{12} + S_{66})n^2m^2 + S_{22}n^4}. \quad (4.66)$$

Berdasarkan persamaan (3.58),

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}; \quad S_{12} = \frac{-\nu_{21}}{E_2} = \frac{-\nu_{12}}{E_1}; \quad S_{22} = \frac{1}{E_2}; \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}};$$

sehingga persamaan (4.65) dapat ditulis sebagai

$$E_x = \frac{1}{\left(\frac{1}{E_1}\right)m^4 + \left[2\left(\frac{-\nu_{12}}{E_1}\right) + \left(\frac{1}{G_{12}}\right)\right]n^2m^2 + \left(\frac{1}{E_2}\right)n^4}$$

maka

$$E_x = \frac{E_1}{m^4 + \left(\frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12}\right)n^2m^2 + \frac{E_1}{E_2}n^4}. \quad (4.67)$$

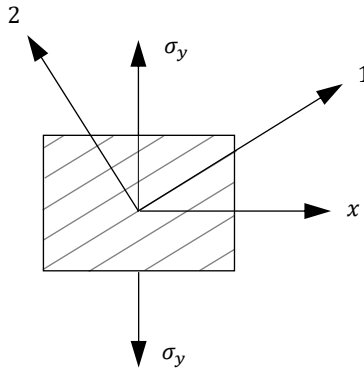
Persamaan (4.67) merupakan rumusan modulus Young E_x . Berdasarkan persamaan (4.67), dapat dilihat bahwa modulus Young E_x dapat ditentukan jika E_1 , E_2 , ν_{12} , G_{12} , dan arah serat diketahui.

Sekarang, misalkan elemen lamina hanya menerima tegangan pada arah y seperti ditunjukkan pada Gambar 4.8. Akibatnya, tentu elemen lamina mengalami regangan pada arah y , yaitu ε_y . Karena tegangan yang bekerja hanya σ_y , ini berarti bahwa σ_x dan τ_{xy} sama dengan nol sehingga berdasarkan persamaan (4.44), regangan ε_y dapat ditulis sebagai

$$\varepsilon_y = \bar{S}_{11}\sigma_x + \bar{S}_{12}\sigma_y + \bar{S}_{16}\tau_{xy}$$

maka

$$\varepsilon_y = \bar{S}_{22}\sigma_y. \quad (4.68)$$



Gambar 4.8 Elemen Lamina yang Menerima Tarikan pada Arah y

Kemudian, berdasarkan definisi modulus Young, dapat dituliskan bahwa $\varepsilon_y = \sigma_y/E_y$ sehingga berdasarkan persamaan (4.68), dapat dituliskan bahwa

$$\bar{S}_{22}\sigma_y = \frac{\sigma_y}{E_y};$$

$$E_y = \frac{1}{\bar{S}_{22}}. \quad (4.69)$$

Dengan menyubstitusikan persamaan (4.50) ke persamaan (4.69), diperoleh

$$E_y = \frac{1}{S_{11}n^4 + (2S_{12} + S_{66})n^2m^2 + S_{22}m^4}. \quad (4.70)$$

Berdasarkan persamaan (3.58), persamaan (4.70) dapat ditulis sebagai

$$E_y = \frac{1}{\left(\frac{1}{E_1}\right)n^4 + \left[2\left(\frac{-\nu_{12}}{E_1}\right) + \left(\frac{1}{G_{12}}\right)\right]n^2m^2 + \left(\frac{1}{E_2}\right)m^4}$$

maka

$$E_y = \frac{E_2}{\left(\frac{E_2}{E_1}\right)n^4 + \left(\frac{E_2}{G_{12}} - 2\nu_{21}\right)n^2m^2 + m^4}. \quad (4.71)$$

Berdasarkan persamaan (4.71), dapat dilihat bahwa modulus Young E_y dapat ditentukan jika E_1 , E_2 , ν_{12} , G_{12} , dan arah serat diketahui.

Contoh 4.7

Sebuah lamina karbon/epoksi memiliki sifat dengan $E_1 = 142$ GPa, $E_2 = 10,5$ GPa, $\nu_{12} = 0,25$, dan $G_{12} = 7,5$ GPa. Sementara itu, sebuah lamina kaca/epoksi memiliki sifat dengan $E_1 = 40$ GPa, $E_2 = 8$ GPa, $\nu_{12} = 0,25$, dan $G_{12} = 4$ GPa. Tentukan modulus Young E_x dan E_y dari kedua lamina tersebut jika arah serat dari kedua lamina tersebut adalah $\theta = 30^\circ$.

Jawab

- a) Karena $m = \cos(30^\circ)$ dan $n = \sin(30^\circ)$, berdasarkan persamaan (4.67), modulus Young E_x lamina karbon/epoksi adalah

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{(142 \text{ GPa})}{m^4 + \left[\frac{(142 \text{ GPa})}{(7,5 \text{ GPa})} - 2(0,25) \right] n^2 m^2 + \frac{(142 \text{ GPa})}{(10,5 \text{ GPa})} n^4} \\ &= 29,15 \text{ GPa}, \end{aligned}$$

sedangkan modulus Young E_x lamina kaca/epoksi adalah

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{(40 \text{ GPa})}{m^4 + \left[\frac{(40 \text{ GPa})}{(4 \text{ GPa})} - 2(0,25) \right] n^2 m^2 + \frac{(40 \text{ GPa})}{(8 \text{ GPa})} n^4} \\ &= 15,06 \text{ GPa}. \end{aligned}$$

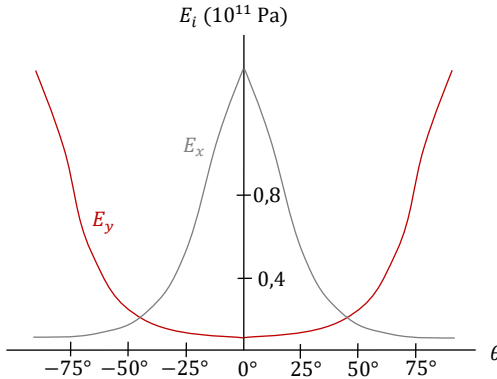
- b) Berdasarkan persamaan (4.71), modulus Young E_y lamina karbon/epoksi adalah

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{(10,5 \text{ GPa})}{\frac{(10,5 \text{ GPa})}{(142 \text{ GPa})} n^4 + \left[\frac{(10,5 \text{ GPa})}{(7,5 \text{ GPa})} - 2(0,25) \right] n^2 m^2 + m^4} \\ &= 12,76 \text{ GPa}, \end{aligned}$$

sedangkan modulus Young E_y lamina kaca/epoksi adalah

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{(8 \text{ GPa})}{\frac{(8 \text{ GPa})}{(40 \text{ GPa})} n^4 + \left[\frac{(8 \text{ GPa})}{(4 \text{ GPa})} - 2(0,25) \right] n^2 m^2 + m^4} \\ &= 8,60 \text{ GPa}. \end{aligned}$$

Jika modulus Young E_x dan E_y dari lamina karbon/epoksi pada contoh ini diplot sebagai fungsi arah serat θ , akan tampak seperti ditunjukkan pada gambar berikut.



Terlihat bahwa E_x bernilai maksimum ketika $\theta = 0$ karena pada keadaan tersebut arah serat adalah pada arah x . Kemudian, E_y bernilai maksimum ketika $\theta = 90^\circ$ karena pada keadaan tersebut arah serat adalah pada arah y .

G. Rasio Poisson pada Sistem Koordinat Global

Ketika elemen lamina pada Gambar 4.7 ditarik pada arah x , akibat efek Poisson, lamina tersebut juga mengalami regangan pada arah y . Efek Poisson tersebut dideskripsikan oleh rasio Poisson ν_{xy} , yaitu

$$\nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \tag{4.72}$$

Ketika satu-satunya tegangan yang bekerja adalah σ_x , regangan ε_x diberikan oleh persamaan (4.64), yaitu $\varepsilon_x = \bar{S}_{11}\sigma_x$. Kemudian, berdasarkan persamaan (4.45), ε_y dapat ditulis sebagai

$$\varepsilon_y = \bar{S}_{12}\sigma_x + \bar{S}_{22}\sigma_y + \bar{S}_{26}\tau_{xy}$$

maka

$$\varepsilon_y = \bar{S}_{12}\sigma_x \tag{4.73}$$

Dengan demikian, rasio Poisson ν_{xy} dapat ditulis sebagai

$$\nu_{xy} = \frac{\bar{S}_{12}\sigma_x}{\bar{S}_{11}\sigma_x}$$

maka

$$\nu_{xy} = -\frac{\bar{S}_{12}}{\bar{S}_{11}}. \quad (4.74)$$

Berdasarkan definisi \bar{S}_{11} dan \bar{S}_{12} yang diberikan oleh persamaan (4.47) dan (4.48), persamaan (4.74) dapat ditulis sebagai

$$\nu_{xy} = -\frac{(S_{11} + S_{22} - S_{66})n^2m^2 + S_{12}(n^4 + m^4)}{S_{11}m^4 + (2S_{12} + S_{66})n^2m^2 + S_{22}n^4}. \quad (4.75)$$

Dengan menyubstitusikan persamaan (3.54) ke persamaan (4.75), rasio Poisson ν_{xy} dapat ditulis sebagai

$$\nu_{xy} = -\frac{\left[\left(\frac{1}{E_1}\right) + \left(\frac{1}{E_2}\right) - \left(\frac{1}{G_{12}}\right)\right]n^2m^2 + \left(\frac{-\nu_{12}}{E_1}\right)(n^4 + m^4)}{\left(\frac{1}{E_1}\right)m^4 + \left[2\left(\frac{-\nu_{12}}{E_1}\right) + \left(\frac{1}{G_{12}}\right)\right]n^2m^2 + \left(\frac{1}{E_2}\right)n^4}$$

maka

$$\nu_{xy} = \frac{\nu_{12}(n^4 + m^4) - \left(1 + \frac{E_1}{E_2} - \frac{E_1}{G_{12}}\right)n^2m^2}{m^4 + \left(\frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12}\right)n^2m^2 + \frac{E_1}{E_2}n^4}. \quad (4.76)$$

Selanjutnya, ketika elemen lamina menerima tegangan pada arah y seperti ditunjukkan pada Gambar 4.7, akibat efek Poisson ν_{yx} , elemen lamina tersebut juga mengalami regangan pada arah x , yaitu ε_x . Rasio Poisson ν_{yx} dapat ditulis sebagai

$$\nu_{yx} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y}. \quad (4.77)$$

Ketika satu-satunya tegangan yang bekerja adalah σ_y , regangan ε_y diberikan oleh persamaan (4.7), yaitu $\varepsilon_y = \bar{S}_{22}\sigma_y$. Kemudian, berdasarkan persamaan (4.45), ε_x dapat ditulis sebagai

$$\varepsilon_x = \bar{S}_{11}\sigma_x + \bar{S}_{12}\sigma_y + \bar{S}_{26}\tau_{xy}$$

maka

$$\varepsilon_x = \bar{S}_{12}\sigma_y. \quad (4.78)$$

Dengan demikian, rasio Poisson ν_{yx} dapat ditulis sebagai

$$\nu_{yx} = -\frac{\bar{S}_{12}\sigma_y}{\bar{S}_{22}\sigma_y} = -\frac{\bar{S}_{12}}{\bar{S}_{22}}. \quad (4.79)$$

Berdasarkan definisi \bar{S}_{12} dan \bar{S}_{22} yang diberikan oleh persamaan (4.48) dan (4.49), persamaan (4.79) dapat ditulis sebagai

$$\nu_{yx} = -\frac{(S_{11} + S_{22} - S_{66})n^2m^2 + S_{12}(n^4 + m^4)}{S_{11}n^4 + (2S_{12} + S_{66})n^2m^2 + S_{22}m^4}. \quad (4.80)$$

Dengan menyubstitusikan persamaan (3.54) ke persamaan (4.80), rasio Poisson ν_{yx} menjadi

$$\nu_{yx} = -\frac{\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}}\right)n^2m^2 - \left(\frac{\nu_{21}}{E_2}\right)(n^4 + m^4)}{\left(\frac{1}{E_1}\right)n^4 + \left(-2\frac{\nu_{21}}{E_2} + \frac{1}{G_{12}}\right)n^2m^2 + \left(\frac{1}{E_2}\right)m^4}$$

maka

$$\nu_{yx} = \frac{\nu_{21}(n^4 + m^4) - \left(1 + \frac{E_2}{E_1} - \frac{E_2}{G_{12}}\right)n^2m^2}{\left(\frac{E_2}{E_1}\right)n^4 + \left(\frac{E_2}{G_{12}} - 2\nu_{21}\right)n^2m^2 + m^4}. \quad (4.81)$$

Contoh 4.8

Berdasarkan Contoh 4.7, tentukan rasio Poisson ν_{xy} dan ν_{yx} kedua lamina tersebut.

Jawab

- a) Berdasarkan persamaan (4.76), rasio Poisson ν_{xy} dari lamina karbon/epoksi adalah

$$\nu_{xy} = \frac{(0,25)(n^4 + m^4) - \left[1 + \frac{(142 \text{ GPa})}{(10,5 \text{ GPa})} - \frac{(142 \text{ GPa})}{(7,5 \text{ GPa})}\right] n^2 m^2}{m^4 + \left[\frac{(142 \text{ GPa})}{(7,5 \text{ GPa})} - 2(0,25)\right] n^2 m^2 + \frac{(142 \text{ GPa})}{(10,5 \text{ GPa})} n^4}$$
$$= 0,20.$$

Sementara itu, rasio Poisson ν_{xy} dari lamina kaca/epoksi adalah

$$\nu_{xy} = \frac{(0,25)(n^4 + m^4) - \left[1 + \frac{(40 \text{ GPa})}{(8 \text{ GPa})} - \frac{(40 \text{ GPa})}{(4 \text{ GPa})}\right] n^2 m^2}{m^4 + \left[\frac{(40 \text{ GPa})}{(4 \text{ GPa})} - 2(0,25)\right] n^2 m^2 + \frac{(40 \text{ GPa})}{(8 \text{ GPa})} n^4}$$
$$= 0,34.$$

- b) Berdasarkan teorema Maxwell-Betti rasio Poisson ν_{21} dari lamina karbon/epoksi adalah

$$\nu_{21} = \frac{\nu_{12}}{E_1} E_2 = \frac{(0,25)}{(142 \text{ GPa})} (10,5 \text{ GPa})$$
$$= 0,09,$$

sedangkan rasio Poisson ν_{21} dari lamina kaca/epoksi adalah

$$\nu_{21} = \frac{\nu_{12}}{E_1} E_2 = \frac{(0,25)}{(40 \text{ GPa})} (8 \text{ GPa})$$
$$= 0,05.$$

Dengan demikian, rasio Poisson ν_{yx} dari lamina karbon/epoksi dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (4.81), yaitu

$$\nu_{yx} = \frac{(0,02)(n^4 + m^4) - \left[1 + \frac{(10,5 \text{ GPa})}{(142 \text{ GPa})} - \frac{(10,5 \text{ GPa})}{(7,5 \text{ GPa})}\right] n^2 m^2}{\frac{(10,5 \text{ GPa})}{(142 \text{ GPa})} m^4 + \left[\frac{(10,5 \text{ GPa})}{(7,5 \text{ GPa})} - 2(0,02)\right] n^2 m^2 + n^4}$$

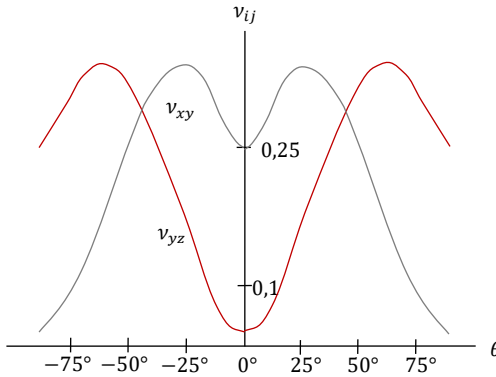
$$= 0,15,$$

sedangkan rasio Poisson ν_{yx} dari lamina kaca/epoksi adalah

$$\nu_{yx} = \frac{(0,05)(n^4 + m^4) - \left[1 + \frac{(8 \text{ GPa})}{(40 \text{ GPa})} - \frac{(8 \text{ GPa})}{(4 \text{ GPa})} \right] n^2 m^2}{\frac{(8 \text{ GPa})}{(40 \text{ GPa})} m^4 + \left[\frac{(8 \text{ GPa})}{(4 \text{ GPa})} - 2(0,05) \right] n^2 m^2 + n^4}$$

$$= 0,19.$$

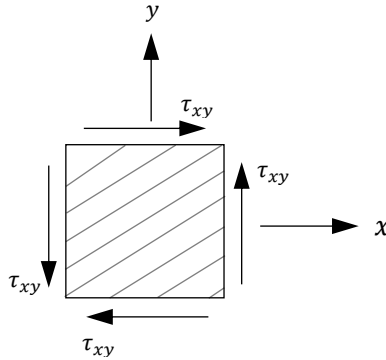
Jika rasio Poisson ν_{xy} dan ν_{yx} dari lamina kaca/epoksi pada contoh ini diplot sebagai fungsi arah serat θ , akan tampak seperti yang ditunjukkan pada gambar berikut.



H. Modulus Geser pada Sistem Koordinat Global

Sekarang, mari kita tinjau elemen lamina yang menerima tegangan geser seperti ditunjukkan pada Gambar 4.9. Akibat tegangan geser tersebut, tentu lamina mengalami regangan geser γ_{xy} . Berdasarkan persamaan (4.45), ketika satu-satunya tegangan geser yang bekerja hanya tegangan geser τ_{xy} , regangan geser yang dihasilkan adalah

$$\gamma_{xy} = \bar{S}_{16}\sigma_x + \bar{S}_{26}\sigma_y + \bar{S}_{66}\tau_{xy} = \bar{S}_{66} \cdot \quad (4.82)$$



Gambar 4.9 Elemen Lamina yang Menerima Tegangan Geser τ_{xy}

Dengan menyubstitusikan persamaan (4.52) ke persamaan (4.82), modulus Geser G_{xy} dapat dirumuskan sebagai

$$G_{xy} = \frac{1}{2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66})n^2m^2 + S_{66}(n^4 + m^4)}. \quad (4.83)$$

Kemudian, dengan menyubstitusikan persamaan (3.54) ke persamaan (4.83), modulus Geser G_{xy} dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} G_{xy} &= \frac{1}{2 \left[2 \left(\frac{1}{E_1} \right) + 2 \left(\frac{1}{E_2} \right) - 4 \left(\frac{-\nu_{12}}{E_1} \right) - \left(\frac{1}{G_{12}} \right) \right] n^2m^2 + \left(\frac{1}{G_{12}} \right) (n^4 + m^4)} \\ &= \frac{G_{12}}{2 \left[2 \left(\frac{G_{12}}{E_1} \right) + 2 \left(\frac{G_{12}}{E_2} \right) - 4 \left(\frac{-\nu_{12}G_{12}}{E_1} \right) - 1 \right] n^2m^2 + (n^4 + m^4)} \end{aligned}$$

maka

$$G_{xy} = \frac{G_{12}}{2 \left[2 \frac{G_{12}}{E_1} (1 + 2\nu_{12}) + 2 \left(\frac{G_{12}}{E_2} \right) - 1 \right] n^2m^2 + (n^4 + m^4)}. \quad (4.84)$$

Seperti modulus Young E_x dan E_y dan rasio Poisson ν_{xy} dan ν_{yx} , dapat dilihat bahwa modulus geser G_{xy} dapat ditentukan jika E_1 , E_2 , ν_{12} , G_{12} , dan arah serat diketahui.

Contoh 4.9

Berdasarkan Contoh 4.7, tentukan modulus geser G_{xy} dari kedua lamina tersebut.

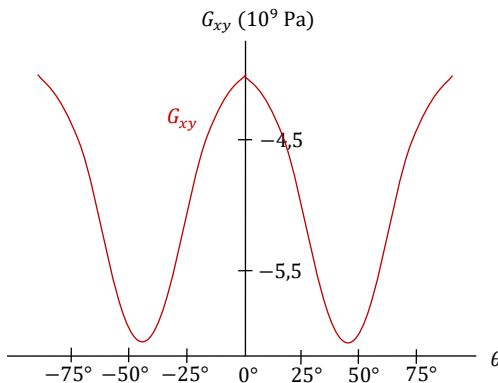
Jawab

Berdasarkan persamaan (4.84), modulus geser G_{xy} dari lamina karbon/epoksi adalah

$$G_{xy} = \frac{(7,5 \text{ GPa})}{2 \left\{ 2 \frac{(7,5 \text{ GPa})}{(142 \text{ GPa})} [1 + 2(0,25)] + 2 \frac{(7,5 \text{ GPa})}{(10,5 \text{ GPa})} - 1 \right\} n^2 m^2 + (n^4 + m^4)}$$
$$= 9,30 \text{ GPa,}$$

sedangkan modulus geser G_{xy} dari lamina kaca/epoksi adalah

$$G_{xy} = \frac{(4 \text{ GPa})}{2 \left\{ 2 \frac{(4 \text{ GPa})}{(40 \text{ GPa})} [1 + 2(0,25)] + 2 \frac{(4 \text{ GPa})}{(8 \text{ GPa})} - 1 \right\} n^2 m^2 + (n^4 + m^4)}$$
$$= 6,05 \text{ GPa.}$$



Jika modulus geser G_{xy} dari lamina kaca/epoksi pada contoh ini diplot sebagai fungsi arah serat θ , akan tampak seperti yang ditunjukkan pada gambar di atas.

I. Rasio Kopel akibat Tegangan Geser

Kita sudah membahas bahwa pada lamina dengan arah serat θ , tegangan normal dapat menyebabkan terjadinya regangan geser, dan tegangan geser dapat menyebabkan terjadinya regangan normal. Artinya, terdapat keterkaitan atau kopel yang terjadi ketika tegangan normal atau tegangan geser bekerja pada lamina tersebut. Untuk mendeskripsikan keterkaitan tersebut, didefinisikanlah besaran baru yang disebut sebagai *rasio kopel*. Rasio Poisson memberikan hubungan antara regangan lateral dan regangan normal, sedangkan rasio kopel memberikan hubungan antara regangan geser dan regangan normal.

Ditinjau dari tegangan yang bekerja pada lamina, terdapat dua jenis rasio kopel. Jenis yang pertama adalah rasio kopel yang memberikan hubungan antara regangan geser dan regangan normal ketika lamina hanya menerima tegangan geser, dan yang kedua adalah rasio kopel yang memberikan hubungan antara regangan geser dan regangan normal ketika lamina hanya menerima tegangan normal.

Pertama, mari kita bahas terlebih dahulu rasio kopel jenis yang pertama. Misalkan satu-satunya tegangan yang bekerja pada sebuah elemen lamina dengan arah serat θ adalah tegangan geser. Akibatnya, elemen lamina tersebut mengalami regangan geser γ_{xy} . Selain itu, misalkan regangan normal yang dihasilkan oleh tegangan geser adalah ε_x dan ε_y . Dengan demikian, seperti pendefinisian rasio Poisson, rasio kopel yang memberikan hubungan antara regangan geser γ_{xy} dan regangan normal ε_x didefinisikan sebagai $\eta_{x,xy}$, yaitu

$$\eta_{x,xy} = \frac{\varepsilon_x}{\gamma_{xy}}. \quad (4.85)$$

Ingat bahwa persamaan (4.85) berlaku jika satu-satunya tegangan yang bekerja adalah tegangan geser. Kemudian, rasio kopel yang memberikan hubungan antara regangan geser γ_{xy} dan regangan normal ε_y didefinisikan sebagai $\eta_{y,xy}$, yaitu

$$\eta_{y,xy} = \frac{\varepsilon_y}{\gamma_{xy}}. \quad (4.86)$$

Berdasarkan persamaan (4.85) dan (4.86), terlihat bahwa makin besar rasio kopel suatu lamina, makin besar juga regangan normal yang dihasilkan akibat adanya tegangan geser.

Selanjutnya, berdasarkan persamaan (4.45), jika satu-satunya tegangan yang bekerja adalah tegangan geser, dapat dituliskan bahwa

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

sehingga

$$\varepsilon_x = \bar{S}_{16} \tau_{xy}; \quad (4.88)$$

$$\varepsilon_y = \bar{S}_{26} \tau_{xy}; \quad (4.89)$$

$$\gamma_{xy} = \bar{S}_{66} \tau_{xy}. \quad (4.90)$$

Dengan demikian, koefisien kopel $\eta_{xy,x}$ dapat ditulis sebagai

$$\eta_{x,xy} = \frac{\bar{S}_{16}}{\bar{S}_{66}}. \quad (4.91)$$

Berdasarkan persamaan (4.91), terlihat bahwa koefisien kopel merupakan fungsi arah serat θ . Dengan menyubstitusikan persamaan (4.49) dan (4.52) ke persamaan (4.91), dapat dituliskan bahwa

$$\eta_{x,xy} = \frac{(2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})nm^3 - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66})n^3m}{2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66})n^2m^2 + S_{66}(n^4 + m^4)}; \quad (4.92)$$

dengan $m = \cos \theta$ dan $n = \sin \theta$.

Selanjutnya, berdasarkan persamaan (4.89) dan (4.90), koefisien kopel $\eta_{xy,y}$ dapat ditulis sebagai

$$\eta_{y,xy} = \frac{\bar{S}_{26}}{\bar{S}_{66}}. \quad (4.93)$$

Dengan menyubstitusikan persamaan (4.51) dan (4.52) ke persamaan (4.93), koefisien kopel $\eta_{xy,y}$ juga dapat ditulis sebagai

$$\eta_{y,xy} = \frac{(2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})n^3m - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66})nm^3}{(2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})n^3m - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66})nm^3}. \quad (4.94)$$

Berdasarkan persamaan (4.90) dan (4.92), karena nilai komponen matriks komplan tereduksi S_{ij} hanya bergantung pada sifat-sifat material, ini

berarti bahwa rasio kopel dari suatu lamina hanya bergantung pada arah serat dan sifat-sifat dari lamina tersebut.

Contoh 4.10

Sebuah lamina karbon/epoksi memiliki sifat dengan $E_1 = 150 \text{ GPa}$, $E_2 = 15 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0,25$, dan $G_{12} = 8 \text{ GPa}$. Tentukan koefisien kopel $\eta_{x,xy}$ dan $\eta_{y,xy}$ dari lamina tersebut jika arah seratnya adalah $\theta = 20^\circ$.

Jawab

Untuk menentukan rasio kopel $\eta_{xy,x}$ dan $\eta_{xy,y}$, kita perlu terlebih dahulu untuk menentukan komponen matriks komplan. Berdasarkan persamaan (3.58), komponen-komponen matriks komplan tereduksi adalah

$$S_{11} = 6,67 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}, \quad S_{22} = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Pa}^{-1},$$

$$S_{12} = -1,67 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}, \quad S_{66} = 1,25 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}.$$

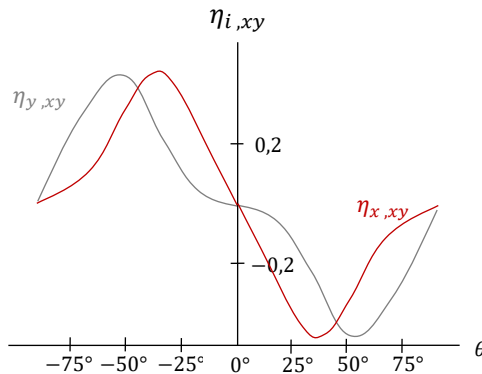
Dengan demikian, berdasarkan persamaan (4.92), karena $m = \cos(20^\circ) = 0,94$ dan $n = \sin(20^\circ) = 0,34$, rasio kopel $\eta_{x,xy}$ adalah

$$\eta_{x,xy} = 0,30.$$

Sementara itu, berdasarkan persamaan (4.94), rasio kopel $\eta_{y,xy}$ adalah

$$\eta_{y,xy} = 0,07.$$

Jika rasio kopel $\eta_{x,xy}$ dan $\eta_{y,xy}$ lamina pada soal ini diplot sebagai fungsi arah serat θ , akan tampak seperti yang ditunjukkan pada gambar di bawah.



J. Rasio Kopel akibat Tegangan Normal

Sekarang, mari kita definisikan rasio kopel yang memberikan hubungan antara regangan geser dan regangan normal pada lamina dengan serat arah θ akibat tegangan normal yang bekerja. Seperti yang sudah kita bahas sebelumnya, ketika satu-satunya tegangan yang bekerja pada suatu elemen lamina adalah tegangan normal σ_x , selain menyebabkan regangan normal ε_x , tegangan tersebut juga menyebabkan regangan geser γ_{xy} . Rasio kopel yang memberikan hubungan antara regangan normal ε_x dan regangan geser γ_{xy} ketika satu-satunya tegangan yang bekerja adalah tegangan normal σ_x didefinisikan sebagai $\eta_{x,xy}$, yaitu

$$\eta_{xy,x} = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x}. \quad (4.95)$$

Kemudian, berdasarkan persamaan (4.45), jika satu-satunya tegangan yang bekerja adalah tegangan σ_x , dapat dituliskan bahwa

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

sehingga

$$\varepsilon_x = \bar{S}_{11} \sigma_x \quad (4.97)$$

dan

$$\gamma_{xy} = \bar{S}_{16} \tau_{xy}. \quad (4.98)$$

Dengan demikian, koefisien kopel $\eta_{xy,x}$ dapat ditulis sebagai

$$\eta_{xy,x} = \frac{\bar{S}_{16}}{\bar{S}_{11}}. \quad (4.99)$$

Dengan menyubstitusikan persamaan (4.47) dan (4.49) ke persamaan (4.99), dapat dituliskan bahwa

$$\eta_{x,xy} = \frac{(2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})nm^3 - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66})n^3m}{S_{11}m^4 + (2S_{12} + S_{66})n^2m^2 + S_{22}n^4}. \quad (4.100)$$

Sama halnya seperti koefisien kopel akibat tegangan geser, koefisien kopel akibat tegangan normal juga hanya bergantung pada arah serat dan sifat-sifat lamina.

Selanjutnya, ketika satu-satunya tegangan yang bekerja pada suatu elemen lamina adalah tegangan normal σ_y , rasio kopel yang memberikan hubungan antara regangan normal ε_y dan regangan geser γ_{xy} didefinisikan sebagai $\eta_{y,xy}$, yaitu

$$\eta_{xy,y} = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_y}. \quad (4.101)$$

Kemudian, berdasarkan persamaan (4.45), jika satu-satunya tegangan yang bekerja adalah tegangan σ_y , dapat dituliskan bahwa

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

sehingga

$$\varepsilon_y = \bar{S}_{22} \sigma_y \quad (4.103)$$

dan

$$\gamma_{xy} = \bar{S}_{26} \tau_{xy}. \quad (4.104)$$

Dengan demikian, koefisien kopel $\eta_{xy,x}$ dapat ditulis sebagai

$$\eta_{xy,y} = \frac{\bar{S}_{26}}{\bar{S}_{22}}. \quad (4.105)$$

Dengan menyubstitusikan persamaan (4.50) dan (4.51) ke persamaan (4.105), dapat dituliskan juga bahwa

$$\eta_{xy,y} = \frac{(2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})n^3m - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66})nm^3}{S_{11}n^4 + (2S_{12} + S_{66})n^2m^2 + S_{22}m^4}. \quad (4.106)$$

Koefisien kopel akibat tegangan normal σ_y juga hanya bergantung pada arah serat dan sifat dari lamina.

Contoh 4.11

Tentukan koefisien kopel $\eta_{xy,x}$ dan $\eta_{xy,y}$ dari lamina pada Contoh 4.10.

Jawab

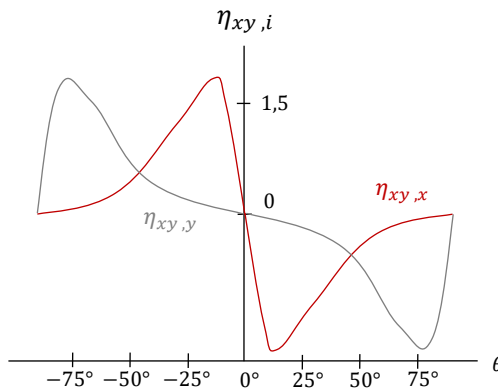
Kita sudah menentukan komponen-komponen matriks komplan tereduksi pada Contoh 4.11. Dengan demikian, karena $m = \cos(20^\circ) = 0,94$ dan $n = \sin(20^\circ) = 0,34$, berdasarkan persamaan (4.101), koefisien kopel $\eta_{xy,x}$ adalah

$$\eta_{xy,x} = 1,67.$$

Kemudian, berdasarkan persamaan (4.105), koefisien kopel $\eta_{xy,y}$ adalah

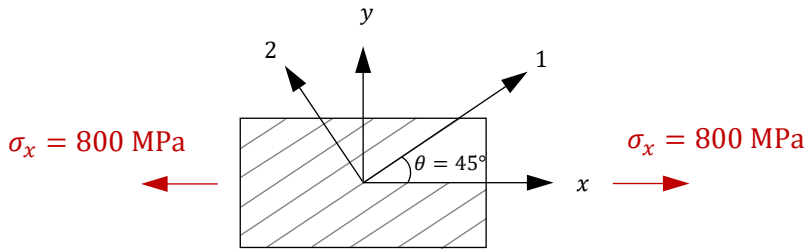
$$\eta_{xy,y} = 0,11.$$

Jika rasio kopel $\eta_{xy,x}$ dan $\eta_{xy,y}$ lamina pada soal ini diplot sebagai fungsi arah serat θ , akan tampak seperti yang ditunjukkan pada gambar di bawah.

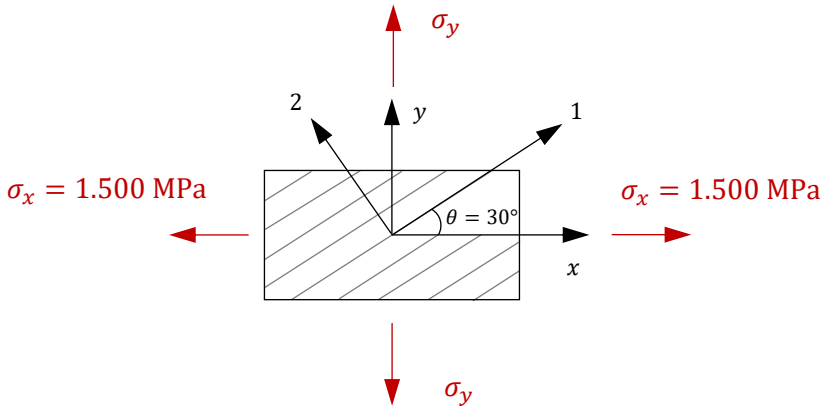


Soal-soal

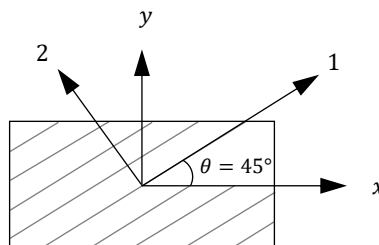
1. Misalkan sebuah lamina menerima tegangan seperti ditunjukkan pada Gambar di bawah. Jika lamina tersebut memiliki sifat dengan $E_1 = 60$ GPa, $E_2 = 8$ GPa, $\nu_{12} = 0,25$, dan $G_{12} = 6$ GPa, tentukan regangan ϵ_x , ϵ_y , dan γ_{xy} yang dialami lamina tersebut.



2. Misalkan sebuah lamina menerima tegangan seperti ditunjukkan pada gambar di bawah. Jika lamina tersebut memiliki sifat dengan $E_1 = 130$ GPa, $E_2 = 12$ GPa, $\nu_{12} = 0,25$, dan $G_{12} = 9$ GPa, tentukan tegangan σ_1 , σ_2 dan τ_{12} , regangan ϵ_x , ϵ_y dan γ_{xy} dan ϵ_1 , ϵ_2 , dan γ_{12} yang dialami oleh lamina tersebut.



3. Tentukan modulus Young E_x , E_y , modulus geser G_{xy} , dan rasio Poisson ν_{xy} dari lamina pada soal nomor 1.
4. Misalkan elemen lamina pada gambar di bawah mengalami regangan berupa $\epsilon_x = 0,5 \times 10^{-6}$, $\epsilon_y = 10^{-7}$, dan $\gamma_{xy} = 1,5 \times 10^{-9}$. Jika lamina tersebut memiliki sifat dengan $E_1 = 70$ GPa, $E_2 = 12$ GPa, $\nu_{12} = 0,25$, dan $G_{12} = 8$ GPa, Tentukan tegangan σ_x , σ_y , dan τ_{xy} yang bekerja pada lamina tersebut.



5. Buktikan bahwa

$$\eta_{xy,x} = E_x \left[\left(\frac{2}{E_1} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin \theta \cos^3 \theta - \left(\frac{2}{E_2} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^3 \theta \cos \theta \right]$$

dan

$$\eta_{xy,y} = E_y \left[\left(\frac{2}{E_1} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^3 \theta \cos \theta - \left(\frac{2}{E_2} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin \theta \cos^3 \theta \right].$$

6. Buktikan bahwa

$$\eta_{x,xy} = G_{xy} \left[\left(\frac{2}{E_1} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin \theta \cos^3 \theta - \left(\frac{2}{E_2} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^3 \theta \cos \theta \right]$$

dan

$$\eta_{y,xy} = G_{xy} \left[\left(\frac{2}{E_1} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^3 \theta \cos \theta - \left(\frac{2}{E_2} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin \theta \cos^3 \theta \right].$$

7. Buktikan bahwa

$$\eta_{x,xy} = \frac{G_{xy}}{E_x} \eta_{xy,x}$$

dan

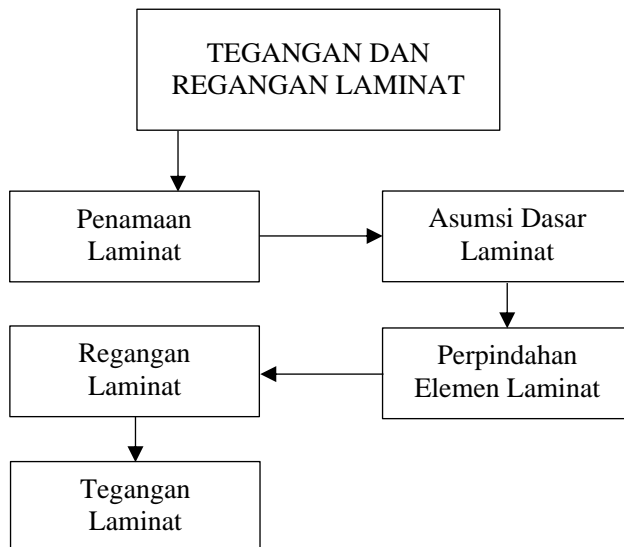
$$\eta_{y,xy} = \frac{G_{xy}}{E_x} \eta_{xy,y}.$$

BAB V

TEGANGAN DAN REGANGAN LAMINAT

Pada dua bab sebelumnya, kita sudah membahas konsep tentang makromekanika lamina. Pada kedua bab tersebut, kita membahas respons sebuah lamina ketika menerima gaya dari luar. Kita juga mengetahui bahwa lamina relatif jauh lebih lemah pada arah yang tegak lurus dengan arah seratnya. Selain itu, satu lapis lamina sangatlah tipis sehingga tidak mampu menahan beban yang cukup besar. Oleh sebab itu, seperti yang sudah kita bahas pada Bab I, dalam pengaplikasiannya, material komposit yang digunakan adalah material komposit dalam bentuk lamina-lamina yang disusun dalam beberapa lapis dengan arah serat yang berbeda-beda sehingga menjadi sebuah laminat.

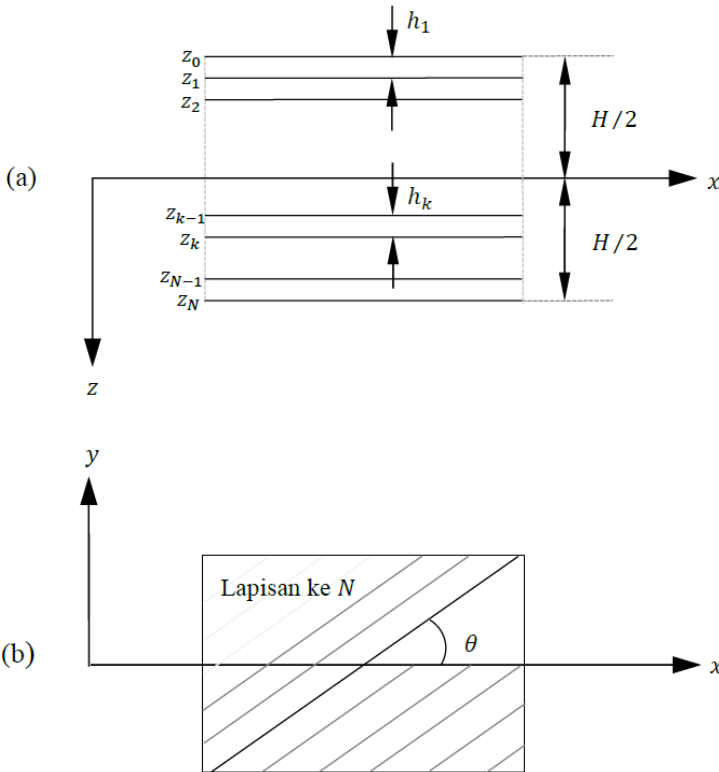
Pada bab ini, kita akan membahas konsep tentang mekanika dari laminat tersebut. Sebagaimana peta konsep pada Gambar 5.1, pertama, kita membahas terlebih dahulu cara penamaan sebuah laminat. Kemudian, kita membahas cara mendeskripsikan regangan yang dialami oleh sebuah laminat. Dengan telah mengetahui regangan yang dialami oleh sebuah laminat, kita dapat menentukan tegangan yang dialami oleh laminat tersebut.



Gambar 5.1 Peta Konsep Bab 5

A. Penamaan Laminat

Untuk menganalisis sebuah laminat, kita perlu membuat sebuah sistem koordinat dengan sumbu x berada di tengah-tengah ketebalan laminat seperti ditunjukkan pada Gambar 5.2a. Berdasarkan Gambar 5.2a, terlihat bahwa sumbu x mengarah ke kanan, sumbu z mengarah ke bawah, dan berdasarkan aturan tangan kanan, sumbu y mengarah ke luar bidang buku ini.



Keterangan: (a) Laminat pada Bidang xz dan (b) Laminat pada Bidang xy
Gambar 5.2 Sketsa Laminat pada Sistem Koordinat xyz .

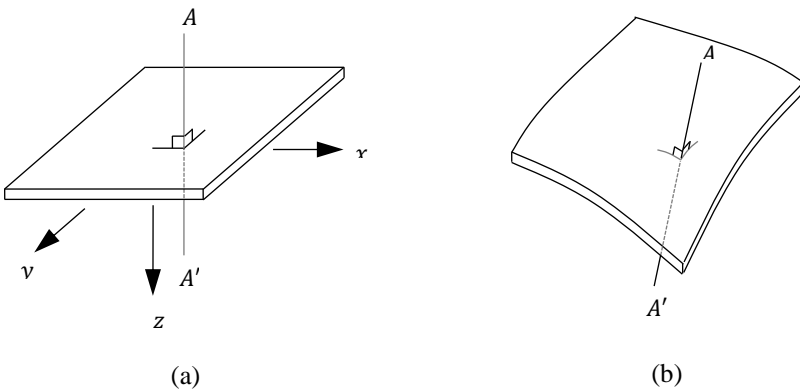
Laminat pada Gambar 5.2 memiliki ketebalan H dan terdiri dari N lapisan. Lapisan pertama, berada pada arah sumbu z yang paling negatif dan lapisan ke- N atau lapisan terakhir berada pada arah sumbu z yang paling positif. Secara umum, ketebalan setiap lamina tidak harus sama sehingga dapat dituliskan bahwa ketebalan lamina pada lapisan ke- k adalah h_k dan lapisan tersebut dibatasi oleh titik z_{k-1} dan z_k .

Arah serat pada setiap lamina penyusun dinyatakan dalam bentuk sudut θ , yaitu sudut yang dihitung dari sumbu x positif seperti ditunjukkan pada

Gambar 5.2b. Berdasarkan aturan tangan kanan, arah sumbu z mengarah keluar bidang halaman sehingga lamina pada gambar tersebut merupakan lapisan ke- N . Untuk menyatakan susunan dari sebuah laminat, kita menggunakan notasi seperti $[0/45/-45/0]$. Susunan $[0/45/-45/0]$ menunjukkan bahwa arah serat dari lamina mulai dari lapisan pertama sampai ke lapisan ke- N secara berturut-turut adalah 0° , 45° , -45° , dan 0° . Artinya, angka yang paling kiri menyatakan arah serat lamina pada lapisan pertama dan angka yang paling kanan menyatakan arah serat lamina pada lapisan ke N . Kemudian, susunan $[0/45/-45/0]$ biasanya lebih sering ditulis sebagai $[0/\pm 45/0]$. Selain itu, laminat biasanya dibuat dengan susunan lamina yang simetris seperti $[0/90/90/0/0/90/90/0]$. Oleh karena itu, untuk mempersingkat penulisan, susunan tersebut dapat ditulis sebagai $[0/90/90/0]_S$. Subskrip S pada penulisan tersebut menunjukkan susunan yang simetris. Selain itu, biasanya notasi $[0/90/90/0]$ juga dipahami sama dengan $[0/90/90/0]_S$ atau $[0/90/90/0/0/90/90/0]$. Oleh sebab itu, untuk menegaskan bahwa laminat dengan susunan $[0/90/90/0]$ hanya terdiri dari empat lamina, susunan tersebut ditulis sebagai $[0/90/90/0]_T$, dengan subskrip T dapat dipikirkan sebagai subskrip yang menunjukkan susunan total.

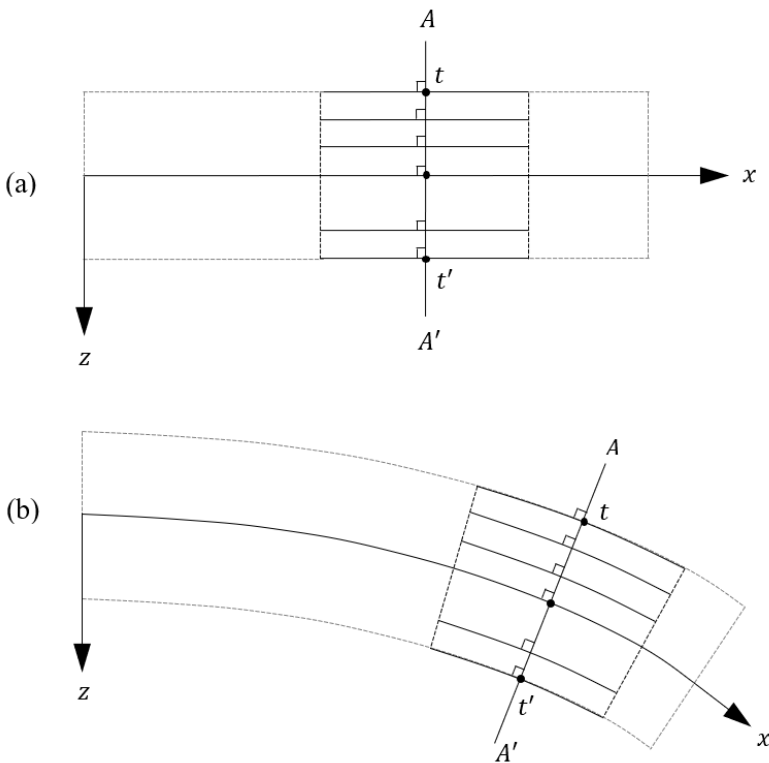
B. Asumsi Dasar Laminat

Analisis tentang laminat yang akan kita bahas didasarkan pada beberapa asumsi yang disebut sebagai *hipotesis Kirchhoff*. Teori yang dikembangkan berdasarkan hipotesis Kirchhoff tersebut disebut sebagai *teori laminasi klasik*. Untuk mengetahui asumsi-asumsi yang digunakan pada teori laminasi klasik tersebut, mari kita tinjau sebuah pelat laminat yang ditunjukkan pada Gambar 5.3a. Garis AA' merupakan garis yang tegak lurus dengan masing-masing permukaan bidang lamina penyusun.



Keterangan: (a) Laminat pada Kondisi Awal dan (b) Laminat yang Mengalami Deformasi
Gambar 5.3 Pelat Lamina yang Dilalui Garis AA'

Asumsi pertama yang diperlukan dalam menganalisis laminat adalah setiap lamina penyusun diasumsikan terikat dengan sempurna sehingga tidak ada slip yang terjadi di antara lamina-lamina tersebut ketika laminat terdeformasi. Ketika laminat pada Gambar 5.3a mengalami deformasi seperti ditunjukkan pada Gambar 5.3b, elemen laminat yang dilalui oleh garis AA' mengalami perpindahan. Elemen laminat yang dilalui oleh garis AA' jika ditinjau dari bidang xz dan yz secara berturut-turut ditunjukkan pada Gambar 5.4a dan 5.4b. Berdasarkan kedua gambar tersebut, bidang yang berimpit dengan sumbu x disebut sebagai *bidang referensi*. Bidang referensi tersebut tegak lurus dengan garis AA' . Jika ditinjau dari bidang xz , perpindahan yang dialami oleh elemen laminat diasumsikan seperti ditunjukkan pada Gambar 5.4b.



Keterangan: (a) Sebelum Terdeformasi dan (b) Setelah Terdeformasi
Gambar 5.4 Elemen Laminat pada Bidang xz

Asumsi berikutnya adalah selama deformasi terjadi, garis AA' selalu tegak lurus dengan permukaan bidang setiap lamina. Selain itu, juga diasumsikan bahwa jarak titik t ke titik t' bernilai konstan. Dengan kata lain, ketebalan laminat tidak berubah. Tentu hal ini tidak sesuai dengan apa yang sudah kita bahas pada bab-bab sebelumnya. Meskipun kita menggunakan

asumsi tegangan bidang, regangan pada arah tegak lurus bidang tetap bisa terjadi sehingga ketebalan sebuah laminat ketika menerima gaya luar tidak selalu bernilai konstan. Namun, mengasumsikan bahwa ketebalan laminat bernilai konstan akan memudahkan kita dalam menganalisis suatu laminat.

Berdasarkan Gambar 5.4b, dapat dilihat bahwa elemen laminat mengalami perpindahan ke kanan bawah. Dengan asumsi-asumsi yang telah dipaparkan, ini berarti bahwa perpindahan yang dialami oleh elemen laminat dapat diwakili oleh perpindahan yang dialami oleh garis AA' . Perpindahan tersebut berupa perpindahan akibat gerak translasi ke kanan bawah dan gerak rotasi pada arah yang searah dengan putaran jarum jam. Selain itu, juga diasumsikan bahwa besar perpindahan yang terjadi sangat kecil. Berdasarkan asumsi-asumsi ini, kita bisa mendefinisikan regangan yang dialami oleh sebuah laminat.

C. Perpindahan Elemen Laminat

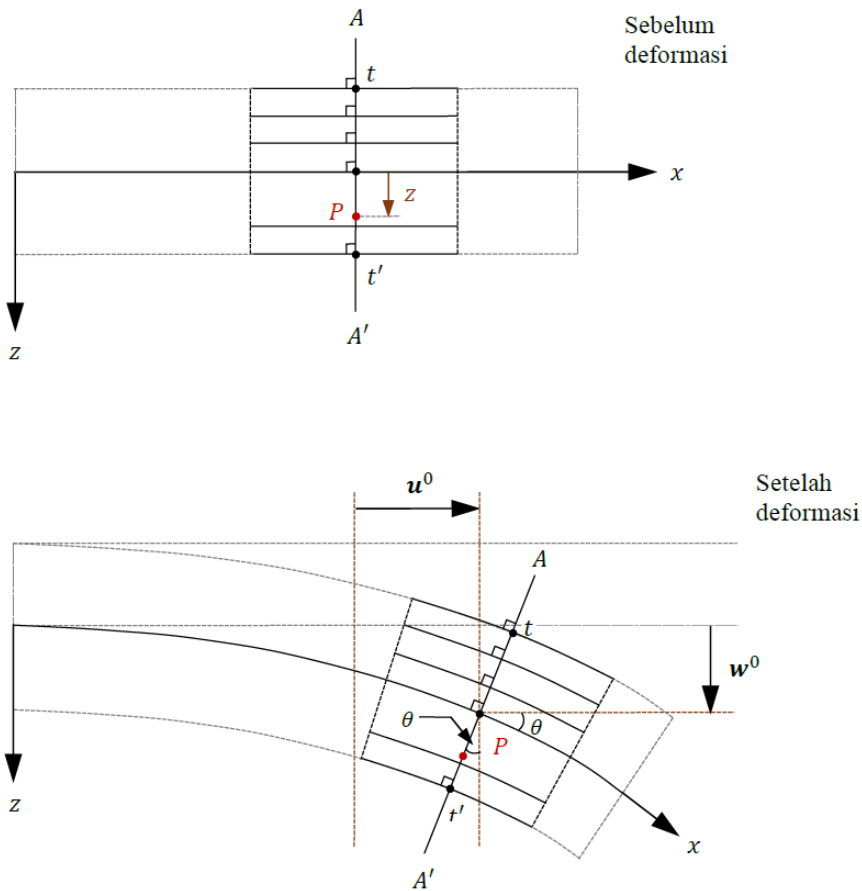
Untuk menentukan regangan laminat yang mengalami deformasi, kita perlu meninjau perpindahan yang dialami oleh titik P , yaitu sembarang titik yang berada di garis AA' dan berada sejauh z dari titik P_0 seperti ditunjukkan pada Gambar 5.5. Berdasarkan gambar tersebut, titik P_0 merupakan titik yang berada di perpotongan bidang referensi dengan garis AA' . Garis AA' diasumsikan selalu tegak lurus terhadap permukaan setiap lamina dan ketebalan laminat diasumsikan bernilai konstan maka perpindahan yang dialami oleh titik P dapat ditentukan jika perpindahan yang dialami oleh titik P_0 dan rotasi yang dialami oleh garis AA' diketahui.

Sekarang, mari kita tentukan terlebih dahulu perpindahan yang dialami oleh titik P pada arah x . Perhatikan bahwa komponen vektor perpindahan titik P akibat titik P_0 yang bertranslasi sejauh u_0 ke kanan adalah u^0 . Kemudian, pembengkokan yang dialami oleh laminat menyebabkan garis AA' berotasi pada arah putaran jarum jam sebesar θ . Dengan demikian, rotasi tersebut menyebabkan titik P mengalami perpindahan pada arah x negatif sebesar $z \sin \theta$. Dengan demikian, komponen perpindahan total titik P pada arah x adalah $u(x, y, z)$, yaitu

$$u(x, y, z) = u^0(x, y) - z \sin \theta. \quad (5.1)$$

Kemudian, perhatikan bahwa karena sudut θ sangat kecil, dapat dituliskan bahwa $\theta = \tan \theta$ dan ini berarti bahwa θ merupakan kemiringan permukaan elemen laminat yang mengalami pembengkokan. Dengan demikian, dapat dituliskan bahwa

$$\theta = \frac{\partial w^0}{\partial x}. \quad (5.2)$$

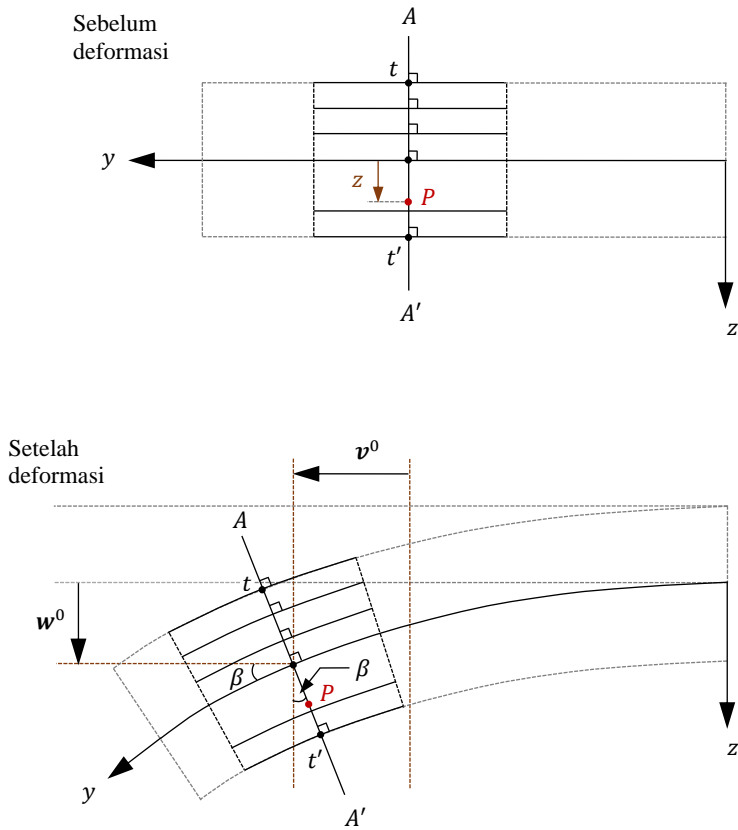


Gambar 5.5 Elemen Laminat pada Gambar 5.3 yang Ditinjau dari Bidang xz

Dengan menyubstitusikan persamaan (5.2) ke persamaan (5.1), komponen perpindahan titik P pada arah x dapat ditulis sebagai

$$u(x, y, z) = u^0(x, y) - z \frac{\partial w^0}{\partial x}. \quad (5.3)$$

Untuk menentukan komponen vektor perpindahan titik P pada arah y , kita perlu meninjau elemen elemen laminat dari bidang yz seperti ditunjukkan pada Gambar 5.6. Berdasarkan gambar tersebut, dapat dilihat bahwa komponen vektor perpindahan titik P akibat titik P_0 yang bertranslasi sejauh v^0 ke kiri adalah v^0 . Kemudian, pembengkokan yang dialami oleh laminat menyebabkan garis AA' berotasi pada arah yang berlawanan dengan putaran jarum jam sebesar β . Rotasi ini menyebabkan titik P mengalami perpindahan pada arah y



Gambar 5.6 Elemen Laminat pada Gambar 5.3 yang Ditinjau dari Bidang yz

negatif sebesar $z \sin \beta$. Dengan demikian, perpindahan total titik P pada arah y adalah $v(x, y, z)$, yaitu

$$v(x, y, z) = v^0(x, y) - z \sin \beta. \quad (5.4)$$

Kemudian, karena sudut β sangat kecil, dapat dituliskan bahwa $\beta = \tan \beta$ dan ini berarti bahwa β merupakan kemiringan permukaan elemen laminat yang mengalami pembengkokan ketika ditinjau dari bidang yz . Dengan demikian, dapat dituliskan bahwa

$$\beta = \frac{\partial w^0}{\partial y}. \quad (5.5)$$

Dengan menyubstitusikan persamaan (5.5) ke persamaan (5.4), perpindahan titik P pada arah y dapat ditulis sebagai

$$v(x, y, z) = v^0(x, y) - z \frac{\partial w^0}{\partial y}. \quad (5.6)$$

Selanjutnya, perhatikan bahwa rotasi yang dialami garis AA' hanya menyebabkan titik P mengalami perpindahan pada arah x dan y . Artinya, perpindahan yang dialami oleh titik P pada arah z hanya disebabkan oleh translasi titik P_0 pada arah z . Karena komponen vektor perpindahan titik P_0 pada arah z adalah w^0 , perpindahan total titik P pada arah z adalah w , yaitu

$$w(x, y, z) = w^0(x, y). \quad (5.7)$$

Rumusan perpindahan yang diberikan oleh persamaan (5.3), (5.6), dan (5.7) memungkinkan kita untuk menentukan regangan yang dialami oleh laminat berdasarkan konsep regangan yang sudah kita bahas pada Bab I. Kemudian, dengan mengetahui regangan yang dialami oleh laminat, kita bisa menentukan tegangan yang dialami oleh laminat tersebut.

D. Regangan Laminat

Berdasarkan definisi regangan yang sudah kita bahas pada Bab I, yaitu definisi regangan yang diberikan oleh persamaan (1.14), karena perpindahan pada arah x yang dialami oleh titik P adalah u , regangan pada arah x dari elemen laminat dapat ditulis sebagai ε_x , yaitu

$$\varepsilon_x(x, y, z) = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x}. \quad (5.8)$$

Dengan menyubstitusikan persamaan (5.3) ke persamaan (5.8), regangan elemen laminat pada arah x adalah

$$\varepsilon_x(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^0(x, y) - z \frac{\partial w^0}{\partial x} \right)$$

maka

$$\varepsilon_x(x, y, z) = \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w^0(x, y)}{\partial x^2}. \quad (5.9)$$

Karena $\partial w^0 / \partial x$ merupakan kemiringan bidang referensi, turunannya terhadap x , yaitu $\partial^2 w^0 / \partial x^2$ merupakan laju perubahan kemiringan dari bidang referensi

tersebut. Artinya, berdasarkan definisi kelengkungan, $\partial^2 w^0 / \partial x^2$ merupakan kelengkungan dari bidang referensi tersebut. Sementara itu, $\partial u^0 / \partial x$ merupakan regangan bidang referensi akibat perpindahan titik P_0 pada arah x . Dengan demikian, dengan mendefinisikan κ_x^0 sebagai

$$\kappa_x^0 = -\frac{\partial^2 w^0(x, y)}{\partial x^2} \quad (5.10)$$

dan ε_x^0 sebagai

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x}, \quad (5.11)$$

regangan elemen laminat pada arah x dapat ditulis sebagai

$$\varepsilon_x(x, y, z) = \varepsilon_x^0 + z\kappa_x^0(x, y). \quad (5.12)$$

Selanjutnya, berdasarkan persamaan (5.6), regangan pada arah y dapat ditulis sebagai ε_y , yaitu

$$\varepsilon_y(x, y, z) = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(v^0(x, y) - z \frac{\partial w^0}{\partial y} \right)$$

maka

$$\varepsilon_y(x, y, z) = \frac{\partial v^0(x, y)}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w^0(x, y)}{\partial y^2}. \quad (5.13)$$

Dengan cara yang sama, dengan mendefinisikan ε_y^0 sebagai

$$\varepsilon_y^0 = \frac{\partial v^0(x, y)}{\partial y}, \quad (5.14)$$

yaitu regangan yang dialami regangan bidang referensi akibat perpindahan titik P_0 pada arah y , dan κ_y^0 sebagai

$$\kappa_y^0 = -\frac{\partial^2 w^0(x, y)}{\partial y^2}, \quad (5.15)$$

yaitu negatif dari kelengkungan bidang referensi pada arah y , persamaan (5.13) dapat ditulis sebagai

$$\varepsilon_y(x, y, z) = \varepsilon_y^0 + z\kappa_y^0(x, y). \quad (5.16)$$

Kemudian, karena ketebalan laminat diasumsikan bernilai konstan, ini berarti bahwa

$$\varepsilon_z(x, y, z) = 0. \quad (5.17)$$

Perpindahan titik P pada arah z bukan disebabkan oleh adanya regangan, melainkan oleh pembengkokan yang dialami oleh elemen laminat.

Selanjutnya, perhatikan bahwa karena diasumsikan bahwa garis AA' selalu tegak lurus dengan permukaan setiap lapisan lamina, ini berarti bahwa tegangan geser pada bidang xz dan yz bernilai nol. Dengan demikian, dapat dituliskan bahwa

$$\gamma_{xz} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0. \quad (5.18)$$

Kemudian, berdasarkan persamaan (1.18), (5.3), dan (5.6), regangan geser pada bidang xy adalah γ_{xy} , yaitu

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(u^0(x, y) - z \frac{\partial w^0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(v^0(x, y) - z \frac{\partial w^0}{\partial y} \right) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u^0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w^0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial v^0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

maka

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y}. \quad (5.19)$$

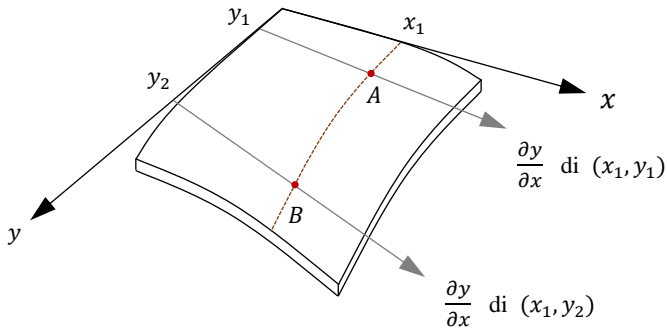
Berdasarkan persamaan (5.19), perhatikan bahwa

$$\gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \quad (5.20)$$

merupakan regangan geser pada bidang xy akibat regangan yang dialami oleh bidang referensi pada arah x dan y . Kemudian, perhatikan bahwa

$$\frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w^0}{\partial x} \right) \quad (5.21)$$

menunjukkan laju perubahan pembengkokan pada arah x di sepanjang sumbu y . Ilustrasi dari besaran $\partial^2 w^0 / \partial x \partial y$ tersebut ditunjukkan pada Gambar 5.7.



Gambar 5.7 Ilustrasi Besaran $\partial^2 w^0 / \partial x \partial y$

Misalkan kedua vektor pada gambar tersebut merupakan vektor yang berimpit dengan garis singgung permukaan bidang pada arah x di titik A dan B . Dari gambar tersebut, dapat dilihat bahwa di sepanjang garis x_1 atau jika kita menyusuri arah y , pembengkokan pada arah x terus bertambah. Dengan mendefinisikan κ_{xy}^0 sebagai

$$\kappa_{xy}^0 = -2 \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y}, \quad (5.22)$$

berdasarkan persamaan (5.20) dan (5.22), persamaan (5.19) dapat ditulis sebagai

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + z \kappa_{xy}^0. \quad (5.23)$$

Dengan demikian, persamaan (5.12), (5.16), dan (5.13) dapat ditulis dalam bentuk yang padu, yaitu

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 + z \kappa_x^0 \\ \varepsilon_y^0 + z \kappa_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 + z \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

Terlihat bahwa secara umum, regangan ε_x , ε_y , dan γ_{xy} merupakan fungsi z atau ketebalan. Artinya, ketika suatu laminat mengalami deformasi, regangan yang dialami oleh setiap lamina penyusun bisa saja berbeda. Bahkan, regangan di sepanjang ketebalan lamina penyusun juga bisa berbeda. Selain itu, regangan di sepanjang ketebalan tersebut diketahui jika regangan pada bidang referensi diketahui.

Contoh 5.1

Bidang referensi sebuah elemen laminat dengan susunan $[\pm 45/0]_S$ mengalami regangan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \epsilon_x^0 &= 950 \times 10^{-6}, & \kappa_x^0 &= 0, \\ \epsilon_y^0 &= 0, & \kappa_y^0 &= 0, \\ \gamma_{xy}^0 &= 0, & \kappa_{xy}^0 &= 0. \end{aligned}$$

Jika ketebalan setiap lamina penyusun adalah 0,15 mm, tentukan regangan yang dialami elemen laminat di sepanjang ketebalan laminat tersebut.

Jawab

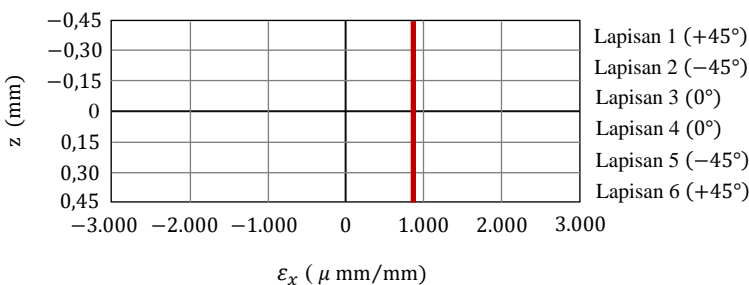
Berdasarkan persamaan (5.24), dapat dituliskan bahwa

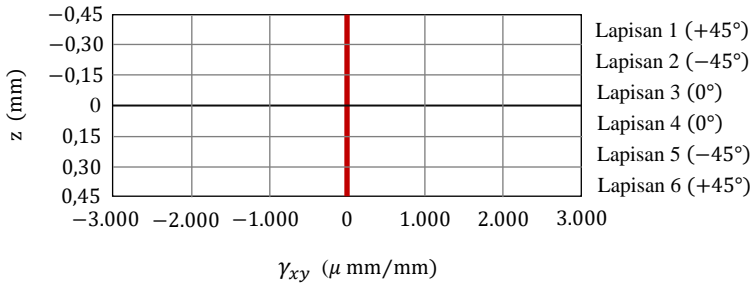
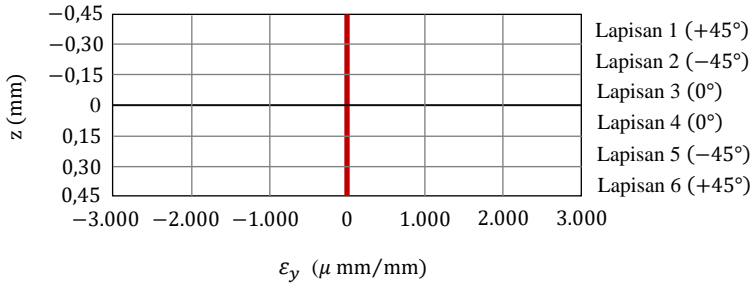
$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (950 \times 10^{-6}) + z(0) \\ 0 + z(0) \\ 0 + z(0) \end{bmatrix}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 950 \times 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{a}$$

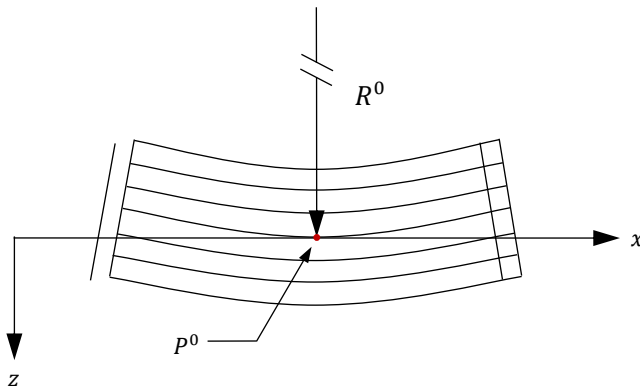
Terlihat bahwa regangan ϵ_x bernilai konstan di sepanjang ketebalan laminat. Kemudian, regangan ϵ_y dan γ_{xy} sama dengan nol. Berdasarkan persamaan a, regangan di sepanjang ketebalan bisa digambarkan seperti ditunjukkan pada gambar di bawah. Perhatikan bahwa $950 \times 10^{-6} = 950 \mu \text{ mm/mm}$.





Contoh 5.2

Misalkan elemen laminat dengan susunan $[\pm 45/0]_S$ mengalami pembengkokan seperti ditunjukkan pada gambar berikut. Jika radius kelengkungan R^0 adalah 0,15 m dan regangan elemen laminat pada titik P^0 adalah $\epsilon_x^0 = 500 \times 10^{-6}$, tentukan regangan yang dialami laminat di sepanjang ketebalan laminat tersebut. Diketahui bahwa ketebalan setiap lamina penyusun adalah 0,15 mm. Kemudian, ϵ_y^0 , γ_{xy}^0 , κ_y^0 , dan κ_{xy}^0 bernilai nol.



Buku ini tidak diperjualbelikan.

Jawab

Karena elemen laminat mengalami pembengkokan, kita perlu terlebih dahulu menentukan κ_x^0 . Perlu diketahui bahwa radius kelengkungan didefinisikan sebagai satu per kelengkungan sehingga dapat dituliskan bahwa

$$\begin{aligned}\kappa_x^0 &= \frac{1}{R^0} = \frac{1}{0,15 \text{ m}} = \frac{1}{150 \text{ mm}} \\ &= 0,0067 \text{ mm}^{-1}\end{aligned}$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (5.24), regangan ε_x , ε_y , dan γ_{xy} yang dialami laminat adalah

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (500 \times 10^{-6}) + z(0,0067) \\ 0 + z(0) \\ 0 + z(0) \end{bmatrix}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (500 \times 10^{-6}) + z(0,0067) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{a})$$

dengan z dalam satuan mm. Perhatikan bahwa karena ketebalan setiap lamina adalah 0,15 mm, permukaan laminat pada arah z negatif berada di titik $z = -0,45$ mm. Regangan elemen laminat pada titik tersebut adalah

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= (500 \times 10^{-6}) + (-0,45 \text{ mm})(0,0067 \text{ mm}^{-1}) \\ &= -2.515 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}\end{aligned}$$

maka

$$\varepsilon_x = -2.515 \mu \text{ mm/mm}. \quad (\text{b})$$

Tanda minus menunjukkan bahwa permukaan laminat pada arah z negatif mengalami kompresi akibat pembengkokan.

Kemudian, permukaan laminat pada arah z positif berada di titik $z = 0,45$ mm. Dengan demikian, regangan yang dialami oleh elemen laminat pada titik tersebut adalah

$$\varepsilon_x = (500 \times 10^{-6}) + (0,45 \text{ mm})(0,0067 \text{ mm}^{-1})$$

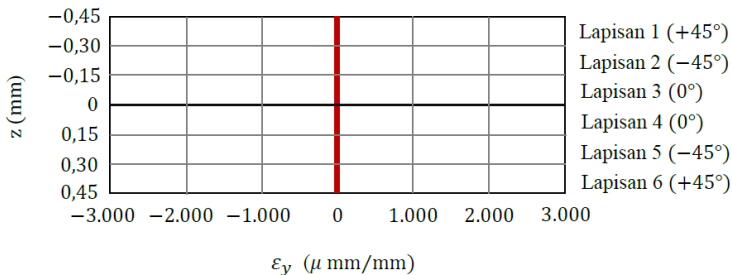
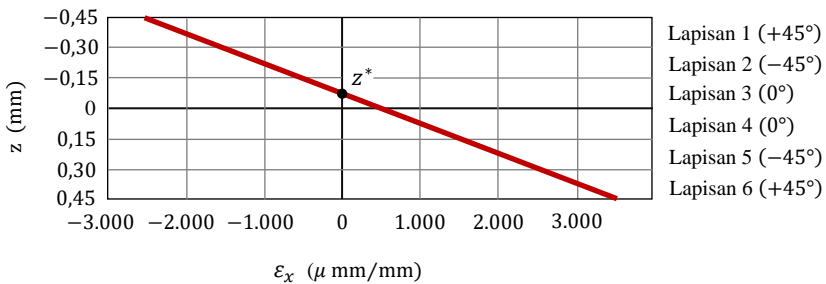
$$\varepsilon_x = 3.515 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$$

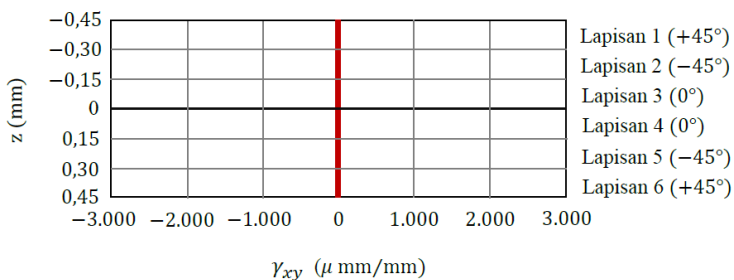
maka

$$\varepsilon_x = 3.515 \mu \text{ mm/mm}. \quad (c)$$

Tanda positif menunjukkan bahwa permukaan laminat pada arah z positif mengalami peregangan.

Berdasarkan persamaan (a), (b), dan (c), regangan yang dialami oleh element laminat di sepanjang ketebalan laminat tersebut dapat digambarkan seperti pada gambar berikut. Terlihat bahwa pada rentang $(-0,45 \text{ mm}) \leq z < z^*$, elemen laminat mengalami regangan tekan atau kompresi. Hal ini ditandai dengan regangan yang bernilai negatif. Kemudian, pada titik z^* , elemen laminat tidak mengalami regangan tekan dan regangan tarik. Hal ini ditandai dengan regangan yang bernilai nol. Kemudian, pada rentang $z^* < z < (0,45 \text{ mm})$, elemen laminat mengalami regangan tarik. Hal ini ditandai dengan regangan yang bernilai positif.





Kemudian, titik z^* dapat ditentukan dengan menjadikan $\epsilon_x = 0$ pada persamaan (c), yaitu

$$0 = (1.000 \times 10^{-6}) + z^* (0,0067 \text{ mm}^{-1}),$$

$$z^* = \frac{-(1.000 \times 10^{-6})}{(0,0067 \text{ mm}^{-1})} = -0,75 \text{ mm}.$$

E. Tegangan Laminat

Pada Bab IV, kita sudah membahas hubungan antara tegangan dan regangan pada sistem koordinat global. Hubungan tersebut diberikan oleh persamaan (4.55), yaitu

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

Berdasarkan persamaan (5.24), persamaan (4.55) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 + z\kappa_x^0 \\ \epsilon_y^0 + z\kappa_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy}^0 \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

Berdasarkan persamaan (5.25), dapat dilihat bahwa karena regangan merupakan fungsi ketebalan atau z , tegangan yang dialami laminat juga merupakan fungsi z . Kemudian, perhatikan bahwa tegangan merupakan fungsi z yang tidak hanya disebabkan oleh regangan yang merupakan fungsi z , tetapi juga disebabkan oleh matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi bergantung pada arah serat. Dengan demikian, jika sebuah laminat terdiri dari lapisan lamina dengan

arah yang berbeda-beda, setiap lapisan yang memiliki arah yang berbeda tersebut juga memiliki matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi yang berbeda sehingga perbedaan tersebut dapat menyebabkan nilai tegangan pada setiap lapisan juga berbeda-beda. Selain itu, perbedaan matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi tidak hanya dapat disebabkan oleh perbedaan arah serat, tetapi juga dapat disebabkan oleh jenis lamina yang berbeda karena bisa saja suatu laminat terdiri dari beberapa jenis laminat.

Contoh 5.3

Misalkan laminat pada Contoh 5.1 dibuat dari lamina yang sudah dibahas pada Contoh 4.6, yaitu lamina dengan $E_1 = 55$ GPa, $E_2 = 15$ GPa, $\nu_{12} = 0,25$, dan $G_{12} = 7$ GPa. Tentukan tegangan σ_x , σ_y , dan τ_{xy} yang bekerja di sepanjang ketebalan laminat tersebut. Kemudian, tentukan juga tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} yang bekerja di sepanjang ketebalan laminat tersebut.

Jawab

- a) Karena laminat memiliki susunan $[\pm 45/0]_S$, ini berarti bahwa terdapat tiga arah serat pada laminat tersebut, yaitu 45° , -45° , dan 0° . Oleh sebab itu, kita perlu menentukan matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi dari ketiga arah tersebut.

Pertama, mari kita tentukan terlebih dahulu matriks kekakuan tereduksi dari lamina dengan serat pada arah 0° . Pada lamina dengan arah serat 0° , ini berarti bahwa arah serat atau arah 1 dari lamina tersebut searah dengan arah x . Dengan kata lain, matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi dari lamina tersebut sama dengan matriks kekakuan tereduksinya. Pada Contoh 4.6, kita sudah menentukan matriks kekakuan tereduksi tersebut. Dengan demikian, matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi dari lamina yang seratnya adalah pada arah 0° dapat ditulis sebagai $\bar{Q}(0^\circ)$, yaitu

$$\bar{Q}(0^\circ) = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}$$

maka

$$\bar{Q}(0^\circ) = \begin{bmatrix} 5,60 & 0,38 & 0 \\ 0,38 & 1,53 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa.} \quad (\text{a})$$

Kemudian, pada Contoh 4.6, kita juga sudah menentukan matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi dari lamina yang seratnya adalah pada arah 45° , yaitu

$$\bar{Q}(45^\circ) = \begin{bmatrix} 2,67 & 1,27 & 1,02 \\ 1,27 & 2,67 & 1,02 \\ 1,02 & 1,02 & 1,60 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa.} \quad (\text{b})$$

Selanjutnya, seperti yang sudah kita bahas pada Bab IV, pada matriks kompliance tereduksi yang ditransformasi, \bar{Q}_{12} dan komponen diagonal yang lain merupakan fungsi genap, sedangkan, \bar{Q}_{16} dan \bar{Q}_{26} merupakan fungsi ganjil. Ini berarti bahwa

$$\bar{Q}_{12}(\theta) = \bar{Q}_{12}(-\theta),$$

$$\bar{Q}_{11}(\theta) = \bar{Q}_{11}(-\theta),$$

$$\bar{Q}_{22}(\theta) = \bar{Q}_{22}(-\theta),$$

$$\bar{Q}_{66}(\theta) = \bar{Q}_{66}(-\theta);$$

dan

$$\bar{Q}_{16}(\theta) = -\bar{Q}_{16}(-\theta),$$

$$\bar{Q}_{26}(\theta) = -\bar{Q}_{26}(-\theta).$$

Oleh karena itu, matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi dari lamina yang seratnya adalah pada arah -45° dapat ditulis sebagai

$$\bar{Q}(-45^\circ) = \begin{bmatrix} 2,67 & 1,27 & -1,02 \\ 1,27 & 2,67 & -1,02 \\ -1,02 & -1,02 & 1,60 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa.} \quad (\text{c})$$

Sekarang, mari tentukan tegangan yang bekerja pada lamina dengan serat arah 0° . Pada Contoh 5.1, kita sudah menentukan regangan yang dialami oleh elemen laminat. Regangan di sepanjang ketebalan bernilai konstan, yaitu

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 950 \times 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (a) dan (4.54), tegangan yang bekerja pada lamina dengan serat arah 0° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,60 & 0,38 & 0 \\ 0,38 & 1,53 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 950 \times 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53,16 \\ 3,62 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ MPa.} \quad (d)$$

Karena susunan laminat adalah $[\pm 45/0]_S$ dan ketebalan masing-masing lamina penyusun adalah 0,15 mm, ini berarti bahwa persamaan (d) berlaku pada rentang $(-0,15 \text{ mm}) \leq z \leq (15 \text{ mm})$.

Kemudian, berdasarkan persamaan (b), tegangan yang bekerja pada lamina dengan serat arah 45° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,67 & 1,27 & 1,02 \\ 1,27 & 2,67 & 1,02 \\ 1,02 & 1,02 & 1,60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 950 \times 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25,38 \\ 12,08 \\ 9,66 \end{bmatrix} \text{ MPa.} \quad (e)$$

Persamaan (e) berlaku pada rentang $(-0,45 \text{ mm}) \leq z \leq (-0,30 \text{ mm})$ dan $(0,30 \text{ mm}) \leq z \leq (0,45 \text{ mm})$.

Kemudian, berdasarkan persamaan (c), tegangan yang bekerja pada lamina dengan serat arah -45° adalah

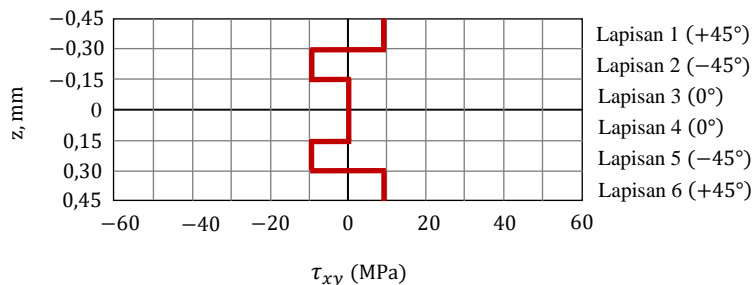
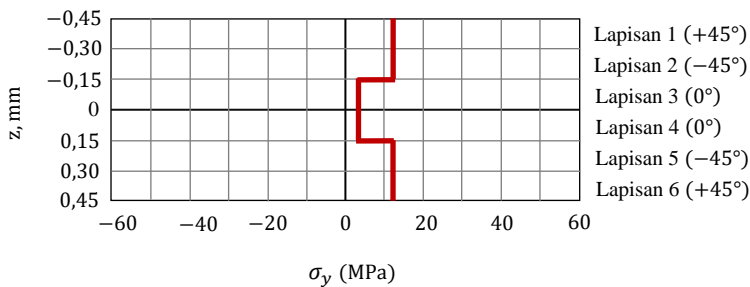
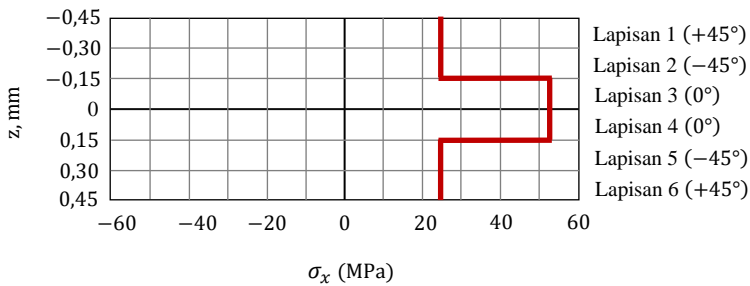
$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,67 & 1,27 & -1,02 \\ 1,27 & 2,67 & -1,02 \\ -1,02 & -1,02 & 1,60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 950 \times 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25,38 \\ 12,08 \\ -9,66 \end{bmatrix} \text{ MPa.} \quad (f)$$

Persamaan (e) berlaku pada rentang $(-0,30 \text{ mm}) \leq z \leq (-0,15 \text{ mm})$ dan $(0,15 \text{ mm}) \leq z \leq (0,30 \text{ mm})$.

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (d), (e), dan (f), tegangan yang bekerja di sepanjang ketebalan laminat dapat digambarkan seperti ditunjukkan pada gambar di bawah.



Terlihat bahwa karena lamina dengan arah serat 0° searah dengan arah regangan laminat, lamina tersebut menahan beban lebih besar dibanding lamina dengan arah serat 45° dan -45° . Kemudian, karena regangan $\varepsilon_y = 0$, ini berarti bahwa terdapat tegangan tarik pada arah y . Karena lamina dengan serat arah 0° relatif lemah pada arah y , tegangan tarik pada arah y yang diterima oleh lamina 45° dan -45° relatif lebih besar.

- b) Pada lamina dengan serat arah 0° , karena arah 1, 2, dan 3 secara berturut-turut searah dengan arah x , y , dan z , berdasarkan persamaan (d), tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} pada lamina tersebut adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53,16 \\ 3,62 \\ 0 \end{bmatrix} \text{MPa.} \quad (\text{g})$$

Kemudian, berdasarkan persamaan (4.16), dengan $m = \cos(45^\circ)$ dan $n = \sin(45^\circ)$, tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} pada lamina dengan serat arah 45° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25,38 \\ 12,08 \\ 9,66 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28,39 \\ 9,06 \\ -6,65 \end{bmatrix} \text{MPa.} \quad (\text{h})$$

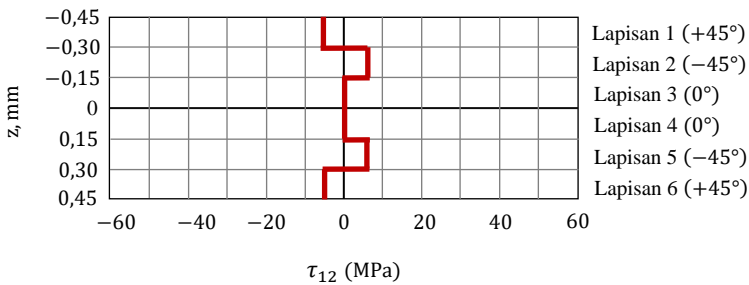
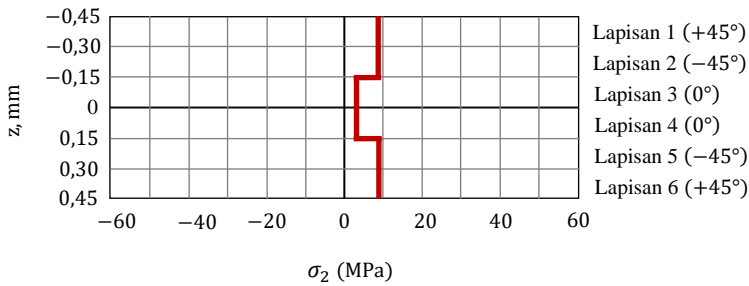
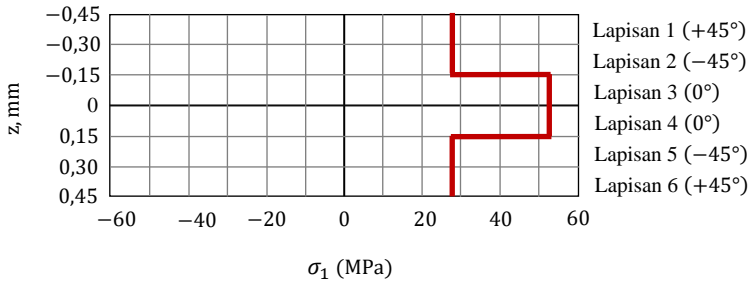
Kemudian, dengan $m = \cos(-45^\circ)$ dan $n = \sin(-45^\circ)$, tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} pada lamina dengan arah serat -45° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25,38 \\ 12,08 \\ -9,66 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28,39 \\ 9,06 \\ 6,65 \end{bmatrix} \text{MPa.} \quad (i)$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (g), (h), dan (i), tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} yang bekerja di sepanjang ketebalan laminat dapat digambarkan seperti ditunjukkan pada gambar di bawah.



Contoh 5.4

Misalkan laminat pada Contoh 5.2 merupakan laminat yang sama dengan laminat pada Contoh 5.3. Tentukan tegangan σ_x , σ_y , dan τ_{xy} yang bekerja di sepanjang ketebalan laminat tersebut. Kemudian, tentukan juga tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} yang bekerja di sepanjang ketebalan laminat tersebut.

Jawab

- a) Regangan di sepanjang ketebalan laminat diberikan oleh persamaan (a) pada Contoh 5.2. Kemudian, matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi dari lamina dengan serat arah 0° diberikan oleh persamaan (a) pada Contoh 5.3. Berdasarkan kedua persamaan tersebut, tegangan yang bekerja di sepanjang ketebalan lamina dengan serat arah 0° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,60 & 0,38 & 0 \\ 0,38 & 1,53 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (500 \times 10^{-6}) + z(0,0067) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0028 + 0,0375z \\ 0,0002 + 0,0025z \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa.} \quad (\text{a})$$

Persamaan (a) berlaku pada rentang $(-0,15 \text{ mm}) \leq z \leq (15 \text{ mm})$. Pada titik $z = -0,15 \text{ mm}$, tegangan yang bekerja adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0028 + 0,0375(-0,15) \\ 0,0002 + 0,0025(-0,15) \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28,26 \\ -1,93 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ MPa.} \quad (\text{b})$$

Pada titik $z = 0,15 \text{ mm}$, tegangan yang bekerja adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0028 + 0,0375(0,15) \\ 0,0002 + 0,0025(0,15) \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84,21 \\ 5,74 \\ 0 \end{bmatrix} \text{MPa.} \quad (c)$$

Terlihat bahwa tegangan di sepanjang ketebalan yang bekerja pada lamina dengan arah serat 0° berbeda-beda.

Kemudian, matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi dari lamina dengan serat arah 45° diberikan oleh persamaan (b) pada Contoh 5.3. Berdasarkan persamaan tersebut, tegangan yang bekerja di sepanjang ketebalan lamina dengan serat arah 45° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,67 & 1,27 & 1,02 \\ 1,27 & 2,67 & 1,02 \\ 1,02 & 1,02 & 1,60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (500 \times 10^{-6}) + z(0,0067) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0013 + 0,0179z \\ 0,0006 + 0,0085z \\ 0,0005 + 0,0068z \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa.} \quad (d)$$

Persamaan (d) berlaku pada rentang $(-0,45 \text{ mm}) \leq z \leq (-0,30 \text{ mm})$ dan $(0,30 \text{ mm}) \leq z \leq (0,45 \text{ mm})$. Pada titik $z = -0,45 \text{ mm}$, tegangan yang bekerja adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0013 + 0,0179(-0,45) \\ 0,0006 + 0,0085(-0,45) \\ 0,0005 + 0,0068(-0,45) \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -67,18 \\ -31,97 \\ -25,59 \end{bmatrix} \text{MPa.} \quad (e)$$

Pada titik $z = -0,30 \text{ mm}$, tegangan yang bekerja adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0013 + 0,0179(-0,30) \\ 0,0006 + 0,0085(-0,30) \\ 0,0005 + 0,0068(-0,30) \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40,33 \\ -19,19 \\ -15,36 \end{bmatrix} \text{ MPa.} \quad (\text{f})$$

Kemudian, pada titik $z = 0,30$ mm, tegangan yang bekerja adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0013 + 0,0179(0,30) \\ 0,0006 + 0,0085(0,30) \\ 0,0005 + 0,0068(0,30) \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67,04 \\ 31,90 \\ 25,54 \end{bmatrix} \text{ MPa.} \quad (\text{g})$$

Sementara itu, pada titik $z = 0,45$ mm, tegangan yang bekerja adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0013 + 0,0179(0,45) \\ 0,0006 + 0,0085(0,45) \\ 0,0005 + 0,0068(0,45) \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93,89 \\ 44,68 \\ 35,76 \end{bmatrix} \text{ MPa.} \quad (\text{h})$$

Selanjutnya matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi dari lamina dengan serat arah -45° diberikan oleh persamaan (c) pada Contoh 5.3. Berdasarkan persamaan tersebut, tegangan yang bekerja di sepanjang ketebalan lamina dengan serat arah 45° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,67 & 1,27 & -1,02 \\ 1,27 & 2,67 & -1,02 \\ -1,02 & -1,02 & 1,60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (500 \times 10^{-6}) + z(0,0067) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0013 + 0,0179z \\ 0,0006 + 0,0085z \\ -0,0005 - 0,0068z \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa.} \quad (i)$$

Persamaan (i) berlaku pada rentang $(-0,30 \text{ mm}) \leq z \leq (-0,15 \text{ mm})$ dan $(0,15 \text{ mm}) \leq z \leq (0,30 \text{ mm})$. Pada titik $z = -0,30 \text{ mm}$, tegangan yang bekerja adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0013 + 0,0179(-30) \\ 0,0006 + 0,0085(-30) \\ -0,0005 - 0,0068(-30) \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40,33 \\ -19,19 \\ 15,36 \end{bmatrix} \text{ MPa.} \quad (j)$$

Pada titik $z = -0,15 \text{ mm}$, tegangan yang bekerja adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0013 + 0,0179(-15) \\ 0,0006 + 0,0085(-15) \\ -0,0005 - 0,0068(-15) \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13,49 \\ -6,42 \\ 5,14 \end{bmatrix} \text{ Mpa.} \quad (k)$$

Kemudian, pada titik $z = 0,15$ mm, tegangan yang bekerja adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0013 + 0,0179(15) \\ 0,0006 + 0,0085(15) \\ -0,0005 - 0,0068(15) \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40,20 \\ 19,13 \\ -15,31 \end{bmatrix} \text{ Mpa} \quad (l)$$

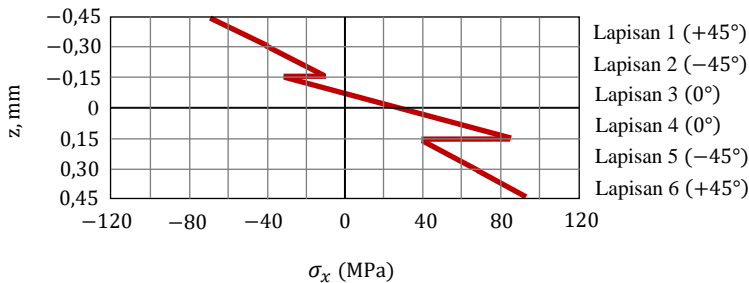
dan pada titik $z = 0,30$ mm, tegangan yang bekerja adalah

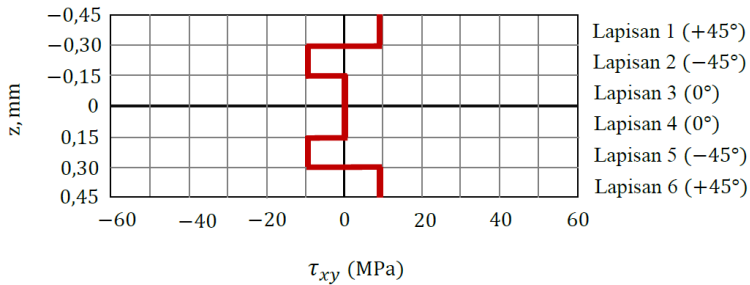
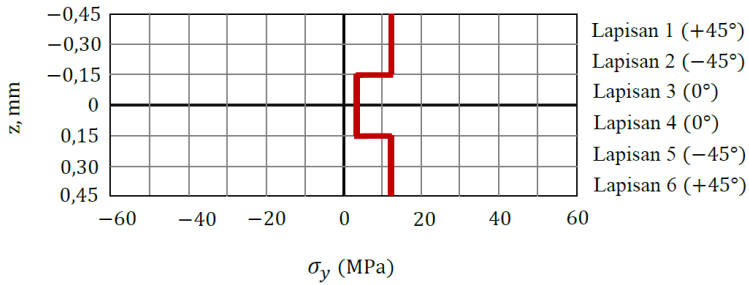
$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0013 + 0,0179(30) \\ 0,0006 + 0,0085(30) \\ -0,0005 - 0,0068(30) \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67,04 \\ 31,90 \\ -25,54 \end{bmatrix} \text{ Mpa.} \quad (m)$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (a)–(m), tegangan yang bekerja di sepanjang ketebalan laminat dapat digambarkan seperti ditunjukkan pada gambar di bawah.





- b) Pada lamina dengan serat pada arah 0° , arah 1, 2, dan 3 secara berturut-turut searah dengan arah x , y , dan z sehingga berdasarkan persamaan (a), tegangan σ_1 , σ_2 dan τ_{12} pada lamina tersebut adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0028 + 0,0375z \\ 0,0002 + 0,0025z \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa.} \quad (\text{n})$$

Persamaan (a) berlaku pada rentang $(-0,15 \text{ mm}) \leq z \leq (15 \text{ mm})$. Karena pada lamina dengan serat arah 0° , arah 1, 2, dan 3 secara berturut-turut searah dengan arah x , y , dan z , pada titik $z = -0,15 \text{ mm}$, tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} yang bekerja sama dengan tegangan yang diberikan oleh persamaan (b), yaitu

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28,26 \\ -1,93 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ MPa.} \quad (\text{o})$$

Pada titik $z = 0,15 \text{ mm}$, tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} yang bekerja sama dengan tegangan yang diberikan oleh persamaan (c), yaitu

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84,21 \\ 5,74 \\ 0 \end{bmatrix} \text{MPa.} \quad (\text{p})$$

Terlihat bahwa tegangan di sepanjang ketebalan yang bekerja pada lamina dengan arah serat 0° berbeda-beda.

Kemudian, berdasarkan persamaan (4.16), dengan $m = \cos 45^\circ$ dan $n = \sin 45^\circ$, tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} pada lamina dengan arah serat 45° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0013 + 0,0179z \\ 0,0006 + 0,0085z \\ 0,0005 + 0,0068z \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0015 + 0,0200z \\ 0,0005 + 0,0064z \\ -0,0004 - 0,0047z \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa.} \quad (\text{q})$$

Persamaan (q) berlaku pada rentang $(-0,45 \text{ mm}) \leq z \leq (-0,30 \text{ mm})$ dan $(0,30 \text{ mm}) \leq z \leq (0,45 \text{ mm})$. Pada titik $z = -0,45 \text{ mm}$, tegangan yang bekerja adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0015 + 0,0200(-0,45) \\ 0,0005 + 0,0064(-0,45) \\ -0,0004 - 0,0047(-0,45) \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -75,16 \\ -23,99 \\ 17,61 \end{bmatrix} \text{MPa.} \quad (\text{r})$$

Pada titik $z = -0,30$ mm, tegangan yang bekerja adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0015 + 0,0200(-0,30) \\ 0,0005 + 0,0064(-0,30) \\ -0,0004 - 0,0047(-0,30) \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -45,13 \\ -14,40 \\ 10,57 \end{bmatrix} \text{ MPa.} \quad (\text{s})$$

Kemudian, pada titik $z = 0,30$ mm, tegangan yang bekerja adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0015 + 0,0200(0,30) \\ 0,0005 + 0,0064(0,30) \\ -0,0004 - 0,0047(0,30) \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75,01 \\ 23,94 \\ -17,57 \end{bmatrix} \text{ MPa.} \quad (\text{t})$$

Pada titik $z = 0,45$ mm, tegangan yang bekerja adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0015 + 0,0200(0,45) \\ 0,0005 + 0,0064(0,45) \\ -0,0004 - 0,0047(0,45) \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105,44 \\ 33,52 \\ -24,61 \end{bmatrix} \text{ MPa} \quad (\text{u})$$

Kemudian, dengan $m = \cos(-45^\circ)$ dan $n = \sin(-45^\circ)$, tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} pada lamina dengana arah serat -45° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0013 + 0,0179z \\ 0,0006 + 0,0085z \\ 0,0005 + 0,0068z \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0005 + 0,0064z \\ 0,0015 + 0,0200z \\ 0,0004 + 0,0047z \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa} \quad (\text{v})$$

Persamaan (v) berlaku pada rentang $(-0,30 \text{ mm}) \leq z \leq (-015 \text{ mm})$ dan $(0,15 \text{ mm}) \leq z \leq (0,30 \text{ mm})$. Pada titik $z = -0,30 \text{ mm}$, tegangan yang bekerja adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0005 + 0,0064(-0,30) \\ 0,0015 + 0,0200(-0,30) \\ 0,0004 + 0,0047(-0,30) \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40,33 \\ -19,19 \\ 15,36 \end{bmatrix} \text{ MPa.} \quad (\text{w})$$

Pada titik $z = -0,15 \text{ mm}$, tegangan yang bekerja adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0005 + 0,0064(-0,15) \\ 0,0015 + 0,0200(-0,15) \\ 0,0004 + 0,0047(-0,15) \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13,49 \\ -6,42 \\ 5,14 \end{bmatrix} \text{ MPa.} \quad (\text{x})$$

Pada titik $z = 0,15$ mm, tegangan yang bekerja adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0005 + 0,0064(0,15) \\ 0,0015 + 0,0200(0,15) \\ 0,0004 + 0,0047(0,15) \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40,20 \\ 19,13 \\ -15,31 \end{bmatrix} \text{ MPa.} \quad y)$$

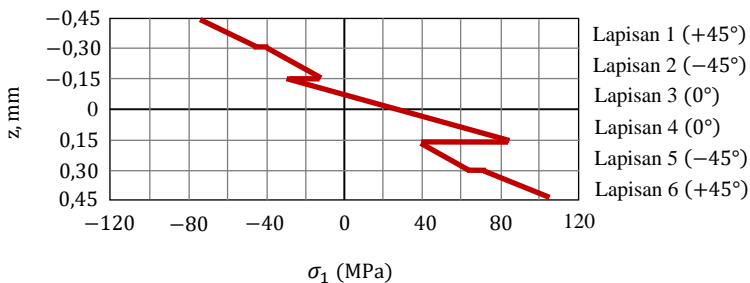
Pada titik $z = 0,30$ mm, tegangan yang bekerja adalah

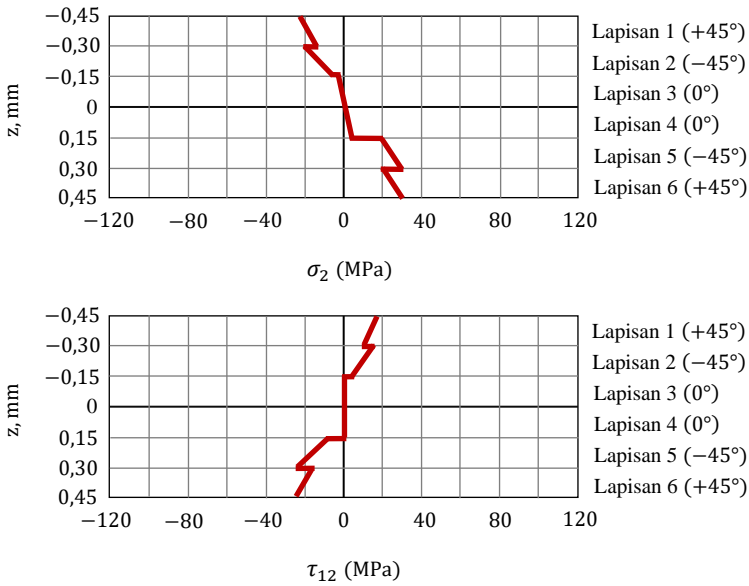
$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0005 + 0,0064(0,30) \\ 0,0015 + 0,0200(0,30) \\ 0,0004 + 0,0047(0,30) \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67,04 \\ 31,90 \\ -25,54 \end{bmatrix} \text{ MPa.} \quad (z)$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (n)–(z), tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} yang bekerja di sepanjang ketebalan laminat dapat digambarkan seperti pada gambar di bawah.





Contoh 5.5

Tentukan regangan ε_1 , ε_2 , dan γ_{12} dari laminat pada Contoh 5.1 atau Contoh 5.3.

Jawab

Pada Contoh 5.1, kita sudah menentukan regangan ε_x , ε_y , dan γ_{xy} di sepanjang ketebalan laminat, yaitu

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 950 \times 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{a})$$

Pertama, mari kita tentukan terlebih dahulu regangan ε_1 , ε_2 , dan γ_{12} pada lamina dengan serat arah 0° . Pada lamina tersebut, arah 1, 2, dan 3 berimpit dengan arah x , y , dan z sehingga regangan ε_1 , ε_2 , dan γ_{12} yang terjadi sama dengan regangan ε_x , ε_y , dan γ_{xy} . Dengan demikian, berdasarkan persamaan (a), dapat dituliskan bahwa

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 950 \times 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (b)$$

Persamaan (b) berlaku pada rentang $(-0,15 \text{ mm}) \leq z \leq (15 \text{ mm})$.

Kita sudah menentukan tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} yang bekerja di sepanjang ketebalan laminat pada Contoh 5.3. Berdasarkan data-data tersebut, regangan ε_1 , ε_2 , dan γ_{12} dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (4.42). Dalam menggunakan persamaan tersebut, kita perlu menentukan terlebih dahulu matriks kompliance tereduksi yang ditransformasi dari laminat. Cara kedua adalah kita dapat langsung menentukan regangan ε_1 , ε_2 , dan γ_{12} berdasarkan regangan ε_x , ε_y , dan γ_{xy} dengan menggunakan matriks transformasi seperti yang diberikan oleh persamaan (4.41). Kita akan menggunakan cara kedua ini.

Berdasarkan persamaan (a) dan (4.41), dengan $m = \cos(45^\circ)$ dan $n = \sin(45^\circ)$, pada lamina dengan serat arah 45° , dapat dituliskan bahwa

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 950 \times 10^{-6} \\ 0 \\ \frac{1}{2}(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 475 \times 10^{-6} \\ 475 \times 10^{-6} \\ -475 \times 10^{-6} \end{bmatrix}.$$

Dengan mengalikan baris ketiga dengan 2, regangan ε_1 , ε_2 , dan γ_{12} yang dialami lamina dengan serat arah 45° adalah

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 475 \times 10^{-6} \\ 475 \times 10^{-6} \\ -950 \times 10^{-6} \end{bmatrix}. \quad (c)$$

Terlihat bahwa regangan ε_1 , ε_2 , dan γ_{12} di sepanjang ketebalan lamina dengan serat arah 45° bernilai konstan. Persamaan (c) berlaku pada rentang $(-0,45 \text{ mm}) \leq z \leq (-0,30 \text{ mm})$ dan $(0,30 \text{ mm}) \leq z \leq (0,45 \text{ mm})$.

Kemudian, dengan $m = \cos(-45^\circ)$ dan $n = \sin(-45^\circ)$, pada lamina dengan serat arah -45° , dapat dituliskan bahwa

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 950 \times 10^{-6} \\ 0 \\ \frac{1}{2}(0) \end{bmatrix}$$

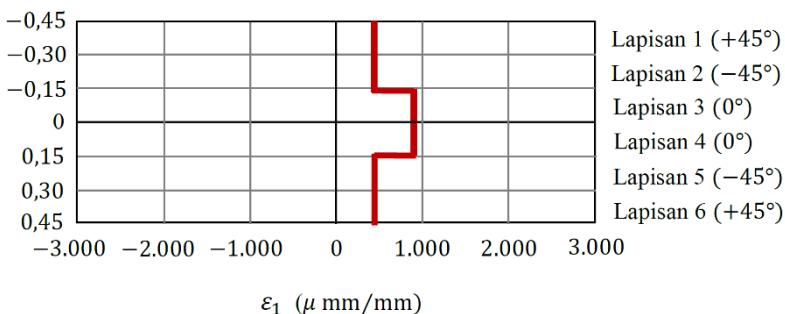
$$= \begin{bmatrix} 475 \times 10^{-6} \\ 475 \times 10^{-6} \\ 475 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

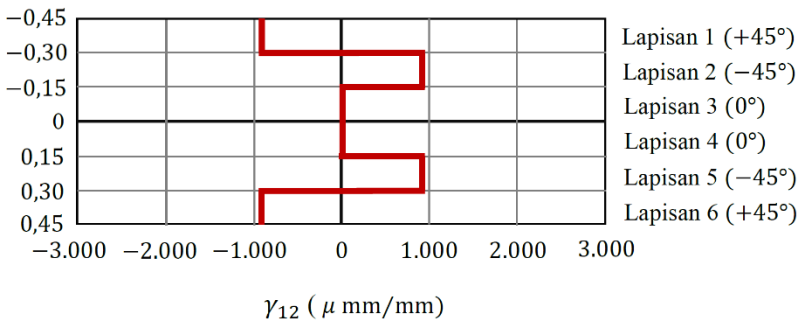
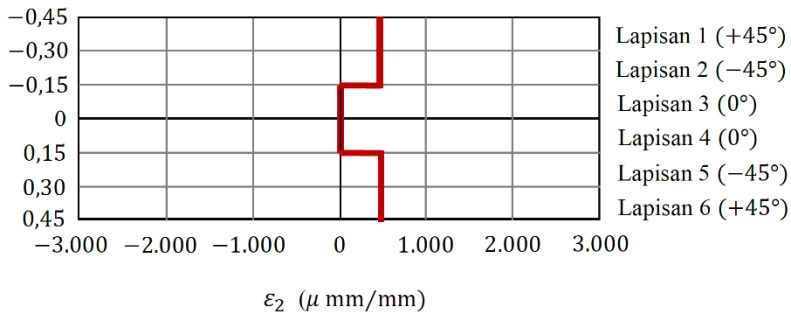
Dengan mengalikan baris ketiga dengan 2, regangan ε_1 , ε_2 , dan γ_{12} yang dialami lamina dengan serat arah 45° adalah

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 475 \times 10^{-6} \\ 475 \times 10^{-6} \\ 950 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \quad (d)$$

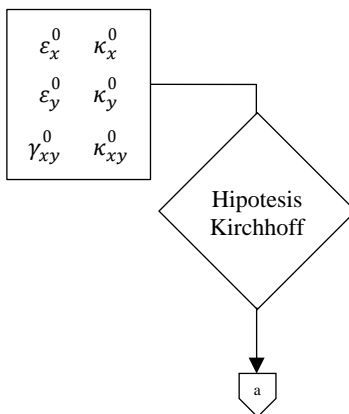
Terlihat bahwa regangan ε_1 , ε_2 , dan γ_{12} di sepanjang ketebalan lamina dengan serat arah -45° juga bernilai konstan. Persamaan (d) berlaku pada rentang $(-0,30 \text{ mm}) \leq z \leq (-0,15 \text{ mm})$ dan $(0,15 \text{ mm}) \leq z \leq (0,30 \text{ mm})$.

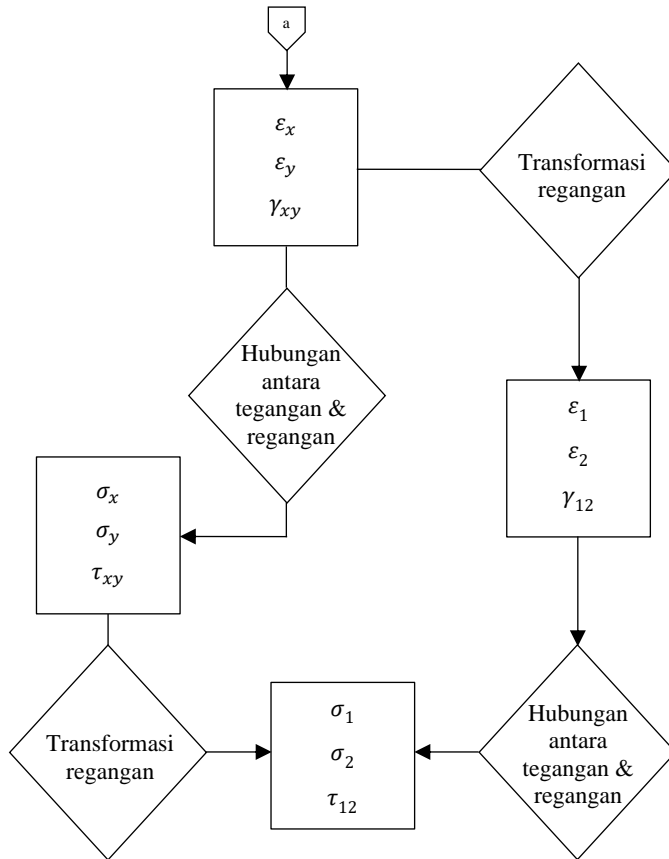
Berdasarkan persamaan (b), (c) dan (d), terlihat bahwa regangan regangan ε_x bernilai sama di sepanjang ketebalan laminat. Selain itu, regangan ε_y dan γ_{xy} sama-sama bernilai nol di sepanjang ketebalan laminat. Akan tetapi, regangan ε_1 , ε_2 , dan γ_{12} tidak seperti itu. Berdasarkan persamaan (b), (c), dan (d), regangan di sepanjang ketebalan laminat dapat digambarkan seperti ditunjukkan pada gambar berikut.





Sekarang, mari kita simpulkan apa yang sudah kita lakukan pada Contoh 5.1–Contoh 5.5. Berdasarkan contoh-contoh tersebut, sebetulnya persoalan kita diawali dengan diketahuinya regangan yang dialami bidang referensi, yaitu ε_x^0 , ε_y^0 , dan γ_{xy}^0 . Jika sifat-sifat dan arah serat lamina-lamina penyusun serta regangan yang dialami bidang referensi diketahui, kita bisa menentukan regangan ε_x , ε_y , dan γ_{xy} ; regangan ε_1 , ε_2 , dan γ_{12} ; tegangan σ_x , σ_y , dan τ_{xy} ; serta tegangan σ_1 , σ_2 dan τ_{12} di sepanjang ketebalan laminat. Hubungan antara besaran-besaran tersebut ditunjukkan pada gambar di bawah.





Ketika regangan ϵ_x^0 , ϵ_y^0 , dan γ_{xy}^0 diketahui, berdasarkan hipotesis Kirchhoff, regangan ϵ_x , ϵ_y , dan γ_{xy} di sepanjang ketebalan laminat dapat ditentukan. Selanjutnya, untuk menentukan tegangan σ_x , σ_y , dan τ_{xy} yang bekerja di sepanjang ketebalan laminat, kita perlu terlebih dahulu untuk menentukan komponen-komponen kekakuan tereduksi. Setelah menentukan matriks kekakuan tereduksi, kita bisa melanjutkan analisis dengan menentukan matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi dari masing-masing lamina penyusun. Matriks tersebut memberikan hubungan antara regangan ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} dan tegangan σ_x , σ_y , τ_{xy} sehingga tegangan σ_x , σ_y , dan τ_{xy} di sepanjang ketebalan laminat dapat ditentukan. Kemudian, dengan menggunakan matriks transformasi, tegangan σ_x , σ_y , dan τ_{xy} dapat ditransformasikan untuk memperoleh σ_1 , σ_2 dan τ_{12} di sepanjang ketebalan laminat.

Selain itu, ketika regangan ϵ_x , ϵ_y , dan γ_{xy} sudah diketahui, regangan ϵ_1 , ϵ_2 , dan γ_{12} juga dapat langsung ditentukan dengan menggunakan matriks transformasi. Kemudian, ketika komponen-komponen matriks kekakuan tereduksi telah ditentukan, matriks tersebut memberikan hubungan antara

tegangan dan regangan pada sistem koordinat utama maka tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} di sepanjang ketebalan laminat juga dapat ditentukan.

Soal-soal

1. Bidang referensi sebuah elemen laminat dengan susunan $[\pm 30]_S$ mengalami regangan sebagai berikut:

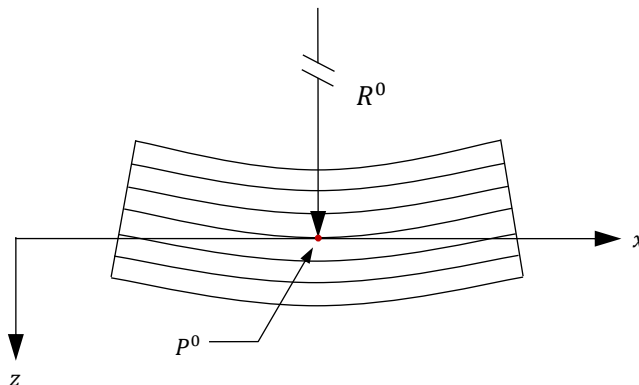
$$\varepsilon_x^0 = 950 \times 10^{-6}, \quad \kappa_x^0 = 0,$$

$$\varepsilon_y^0 = 200 \times 10^{-6}, \quad \kappa_y^0 = 0,$$

$$\gamma_{xy}^0 = 0, \quad \kappa_{xy}^0 = 0.$$

Jika ketebalan setiap lamina penyusun adalah 0,15 mm, tentukan regangan ε_x , ε_y , dan γ_{xy} yang dialami elemen laminat di sepanjang ketebalan laminat tersebut.

2. Jika laminat pada soal nomor 1 memiliki sifat dengan $E_1 = 100$ GPa, $E_2 = 10$ GPa, $\nu_{12} = 0,25$, dan $G_{12} = 9$ GPa, tentukan tegangan σ_x , σ_y , τ_{xy} dan tegangan σ_1 , σ_2 , τ_{12} di sepanjang ketebalan laminat tersebut.
3. Misalkan elemen laminat dengan susunan $[\pm 30/0]_S$ mengalami pembengkokan seperti ditunjukkan pada gambar di bawah. Jika radius kelengkungan R^0 adalah 0,12 m dan regangan elemen laminat pada titik P^0 adalah $\varepsilon_x^0 = 500 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_y^0 = 150 \times 10^{-6}$, $\gamma_{xy}^0 = \kappa_y^0 = \kappa_{xy}^0 = 0$, tentukan regangan ε_x , ε_y , dan γ_{xy} yang dialami laminat di sepanjang ketebalan laminat tersebut.

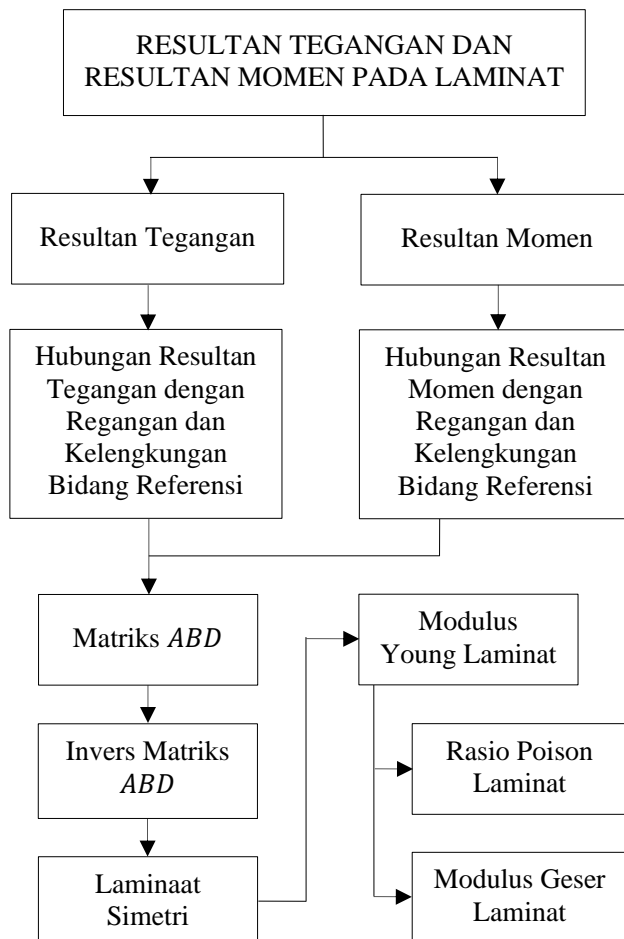


4. Jika lamina pada soal nomor 3 memiliki sifat $E_1 = 100$ GPa, $E_2 = 10$ GPa, $\nu_{12} = 0,25$ dan $G_{12} = 9$ GPa, tentukan regangan ε_1 , ε_2 , dan γ_{12} ; tegangan σ_x , σ_y , dan τ_{xy} ; serta tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} di sepanjang ketebalan laminat.
5. Berdasarkan tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} yang sudah diperoleh pada Contoh 5.4, dengan menggunakan hubungan antara tegangan dan regangan pada sistem koordinat utama, tentukan regangan ε_1 , ε_2 , dan γ_{12} di sepanjang ketebalan laminat tersebut dan bandingkan hasilnya dengan jawaban pada Contoh 5.5

BAB VI

RESULTAN TEGANGAN DAN RESULTAN MOMEN

Kita sudah membahas bahwa tegangan yang bekerja pada masing-masing lamina pada suatu laminat berbeda-beda. Oleh sebab itu, akan memudahkan jika kita mengasumsikan bahwa laminat hanya menerima tegangan pada bagian tengah ketebalan laminat yang ekuivalen dengan tegangan total. Untuk itu, kita akan mendefinisikan beberapa besaran baru seperti resultan tegangan dan resultan momen. Berdasarkan pendefinisian besaran-besaran tersebut, kita akan



Gambar 6.1 Peta Konsep Bab VI

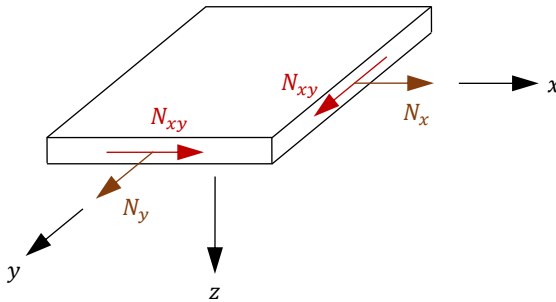
membahas konsep tentang matriks ABD atau matriks kekakuan laminat. Berdasarkan konsep tentang matriks tersebut, kita bisa menganalisis pengaruh susunan laminat terhadap sifat mekanik dari laminat tersebut. Selain itu, kita juga bisa menentukan modulus Young, modulus geser, dan rasio Poisson dari laminat. Adapun peta konsep untuk Bab VI ini sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 6.1.

A. Resultan Tegangan

Kita sudah membahas bahwa tegangan yang bekerja pada arah x adalah σ_x . Berdasarkan definisi tegangan tersebut, *resultan tegangan* pada arah x didefinisikan sebagai N_x , yaitu

$$N_x = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_x dz. \tag{6.1}$$

Karena N_x merupakan integral σ_x terhadap ketebalan, kita bisa menganggap bahwa N_x merupakan gaya per satuan panjang penampang laminat yang mengarah ke sumbu x seperti ditunjukkan pada Gambar 6.2.



Gambar 6.2 Resultan Tegangan dan Resultan Tegangan Geser yang bekerja pada Elemen Laminat

Berdasarkan gambar 6.2, jika N_x bernilai seragam di sepanjang penampang laminat pada arah x dan panjang penampang laminat pada arah x tersebut adalah L_x , besar gaya total yang bekerja pada penampang tersebut adalah $N_x L_x$. Kemudian, karena secara umum tegangan berbeda-beda di setiap lapisan lamina penyusun, N_x dapat dipikirkan sebagai tegangan ekuivalen yang bekerja di bagian tengah ketebalan laminat.

Pada sebagian literatur, resultan tegangan N_x yang didefinisikan oleh persamaan (6.1) disebut sebagai *resultan gaya*. Akan tetapi, meskipun N_x disebut sebagai resultan gaya, N_x bukanlah besaran gaya dan bukan besaran

vektor, melainkan merupakan besar gaya per satuan panjang. Oleh sebab itu, di buku ini, kita menyebut N_x sebagai resultan tegangan.

Selanjutnya, dengan cara yang sama, resultan tegangan pada arah y , yang misalkan disimbolkan sebagai N_y , didefinisikan sebagai

$$N_y = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_y dz. \quad (6.2)$$

Sementara itu, *resultan tegangan geser* pada bidang xy , yang misalkan disimbolkan sebagai N_{xy} , didefinisikan sebagai

$$N_{xy} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \tau_{xy} dz. \quad (6.3)$$

Berdasarkan persamaan (6.2), N_y merupakan gaya per satuan panjang penampang laminat yang menghadap ke arah y , sedangkan N_{xy} merupakan gaya geser per satuan panjang penampang laminat pada bidang xy seperti ditunjukkan pada Gambar 6.2.

B. Resultan Momen

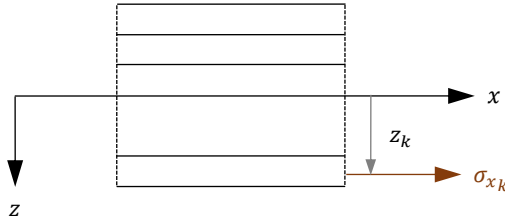
Tegangan yang bekerja di sepanjang ketebalan elemen laminat menghasilkan momen terhadap bidang referensi. Sebagai contoh, tegangan σ_{xk} seperti yang diilustrasikan pada Gambar 6.3, yaitu tegangan yang bekerja pada titik z_k , menghasilkan momen sebesar $\sigma_{xk} z_k$ terhadap bidang referensi elemen laminat. Dengan menggunakan aturan tangan kanan, arah dari momen yang dihasilkan adalah tegak lurus keluar bidang buku ini. Momen ini akan menyebabkan laminat mengalami pembengkokan ke atas.

Jika kita menjumlahkan momen yang dihasilkan oleh setiap tegangan di sepanjang ketebalan laminat, penjumlahan momen itu disebut sebagai *resultan momen*. Dengan demikian, resultan momen yang dihasilkan oleh tegangan σ_x dapat didefinisikan sebagai M_x yaitu

$$M_x = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_x z dz. \quad (6.4)$$

Resultan yang dihasilkan oleh tegangan σ_y didefinisikan sebagai M_y , yaitu

$$M_y = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_y z dz. \quad (6.5)$$

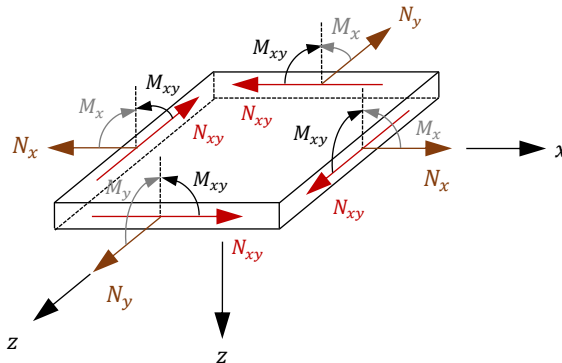


Gambar 6.3 Ilustrasi Momen terhadap Bidang Referensi yang Dihasilkan oleh Tegangan σ_{xk}

Selain itu, resultan momen yang dihasilkan oleh tegangan τ_{xy} didefinisikan sebagai M_{xy} , yaitu

$$M_{xy} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \tau_{xy} z \, dz. \quad (6.6)$$

Gambar 6.4 mengilustrasikan M_x , M_y , dan M_{xy} yang bernilai positif. Panah yang melengkung menunjukkan pembengkokan yang akan dialami akibat resultan momen yang bekerja. Resultan momen yang bernilai positif menghasilkan kelengkungan yang positif. Terlihat bahwa M_x dan M_y menyebabkan pembengkokan dan M_{xy} menyebabkan pemuntiran. Oleh sebab itu, resultan momen M_x dan M_y biasanya juga disebut sebagai *momen pembengkok*, sedangkan resultan momen M_{xy} biasanya juga disebut sebagai *momen pemuntir*.



Gambar 6.4 Resultan Tegangan dan Resultan Tegangan Geser yang Bekerja pada Elemen Laminat

C. Hubungan Resultan Tegangan dengan Regangan dan Kelengkungan Bidang Referensi

Kita sudah membahas bahwa resultan tegangan merupakan integral dari tegangan terhadap ketebalan laminat. Selanjutnya, kita perlu menentukan rumusan dari resultan tegangan tersebut sehingga ketika resultan tegangan diketahui, kita bisa menentukan regangan yang dialami oleh laminat. Hal tersebut dapat dilakukan dengan cara menentukan rumusan yang memberikan hubungan antara resultan tegangan dengan regangan dan kelengkungan bidang referensi.

Pada Bab V, kita sudah membahas bahwa hubungan antara tegangan dan regangan diberikan oleh persamaan (5.25). Supaya lebih jelas, persamaan tersebut adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 + z\kappa_x^0 \\ \varepsilon_y^0 + z\kappa_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy}^0 \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

Persamaan (6.7) dapat dijabarkan lagi sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (6.1), (6.2), dan (6.3), dapat dituliskan bahwa

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz. \quad (6.9)$$

Dengan menyubstitusikan persamaan (6.8) ke persamaan (6.9), diperoleh

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left(\begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} \right) dz$$

maka

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} dz + \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} dz. \quad (6.10)$$

Karena laminat terdiri dari beberapa lapisan lamina, sebetulnya matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi pada ruas kanan persamaan (6.10) bisa berbeda-beda di setiap lapisan. Oleh sebab itu, perhatikan bahwa persamaan tersebut dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} dz + \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} dz. \quad (6.11)$$

Subskrip k pada kedua matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi pada ruas kanan persamaan (6.11) menunjukkan bahwa matriks tersebut merupakan matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi dari lamina atau lapisan ke k . Selanjutnya, karena regangan dan kelengkungan bidang referensi bernilai konstan atau tidak bergantung pada z , besaran-besaran tersebut dapat dikeluarkan dari tanda integral sehingga persamaan (6.11) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \left(\sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k dz \right) \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \left(\sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k dz \right) \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix}. \quad (6.12)$$

Kemudian, karena komponen-komponen matriks komplan tereduksi yang ditransformasi juga bernilai konstan pada setiap lamina, persamaan (6.12) dapat dijabarkan lagi sebagai

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} &= \left(\sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz \right) \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \\
&+ \left(\sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz \right) \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} \\
&= \left\{ \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k (z_k - z_{k-1}) \right\} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \\
&+ \left\{ \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left(\frac{1}{2} z_k^2 - \frac{1}{2} z_{k-1}^2 \right) \right\} \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} &= \left(\sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k h_k \right) \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \\
&+ \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right\} \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix}, \quad (6.13)
\end{aligned}$$

dengan $h_k = (z_k - z_{k-1})$, yaitu ketebalan lapisan ke- k .

Kemudian, dengan mendefinisikan matriks A sebagai

$$A = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k h_k \quad (6.14)$$

dan matriks B sebagai

$$B = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k (z_k^2 - z_{k-1}^2), \quad (6.15)$$

persamaan (6.13) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

Persamaan (6.16) memberikan hubungan antara resultan tegangan dan resultan tegangan geser dengan regangan dan kelengkungan bidang referensi laminat.

D. Hubungan Resultan Momen dengan Regangan dan Kelengkungan Bidang Referensi

Kita juga bisa merumuskan resultan momen sedemikian rupa sehingga jika regangan dan kelengkungan bidang referensi diketahui, resultan momen yang bekerja dapat ditentukan. Berdasarkan persamaan (6.4), (6.5), dan (6.6), dapat dituliskan bahwa

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z \, dz. \quad (6.17)$$

Kemudian, dengan menyubstitusikan persamaan (6.8) ke persamaan (6.17), diperoleh

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left(\begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} \right) z \, dz$$

dan

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} &= \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} z dz \\
&+ \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z^2 \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} dz. \tag{6.18}
\end{aligned}$$

Sama seperti penjabaran rumusan untuk resultan tegangan, matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi bernilai konstan pada setiap lapisan. Selain itu, regangan dan kelengkungan bidang referensi juga bernilai konstan maka besaran-besaran tersebut dapat dikeluarkan dari tanda integral sehingga persamaan (6.18) dapat dijabarkan lagi sebagai

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} &= \left(\sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz \right) \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \\
&+ \left(\sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 dz \right) \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} \\
&= \left\{ \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left(\frac{1}{2} z_k^2 - \frac{1}{2} z_{k-1}^2 \right) \right\} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \\
&+ \left\{ \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left(\frac{1}{3} z_k^3 - \frac{1}{3} z_{k-1}^3 \right) \right\} \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} \\
&= \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right\} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \\
&+ \left\{ \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \right\} \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix}. \tag{6.19}
\end{aligned}$$

Berdasarkan definisi matriks B dan dengan mendefinisikan matriks D sebagai

$$D = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k (z_k^3 - z_{k-1}^3), \quad (6.20)$$

persamaan (6.19) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + D \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix}. \quad (6.21)$$

Persamaan (6.21) memberikan hubungan antara resultan momen dengan regangan dan kelengkungan bidang referensi laminat.

E. Matriks ABD

Kita sudah menentukan rumusan resultan tegangan N_x , N_y , dan N_{xy} yang diberikan oleh persamaan (6.16). Kemudian, kita juga sudah menentukan resultan momen M_x , M_y , dan M_{xy} yang diberikan oleh persamaan (6.21). Jika matriks A , matriks B , dan matriks D yang secara berturut-turut diberikan oleh persamaan (6.14), (6.15), dan 6.20 ditulis sebagai

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}, \quad (6.22)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix}, \quad (6.23)$$

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}; \quad (6.24)$$

persamaan (6.16) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

dan persamaan (6.21) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix}. \quad (6.26)$$

Dengan demikian, persamaan (6.25) dan (6.26) dapat ditulis sebagai bentuk yang lebih padu, yaitu

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix}. \quad (6.27)$$

Karena matriks 6×6 pada persamaan (6.27) terdiri dari matriks A , B , dan D , matriks tersebut disebut sebagai *matriks ABD* dan biasanya disebut juga sebagai *matriks kekakuan laminat*. Matriks ABD memberikan hubungan resultan tegangan dan resultan momen dengan regangan dan kelengkungan yang dialami oleh bidang referensi. Jika regangan bidang referensi diketahui, resultan tegangan dan resultan momen dapat langsung ditentukan.

Jika kedua ruas persamaan (6.27) dikalikan dengan invers matriks ABD , persamaan tersebut menjadi

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} & b_{11} & b_{12} & b_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} & b_{12} & b_{22} & b_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} & b_{16} & b_{26} & b_{66} \\ b_{11} & b_{12} & b_{16} & d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} & d_{12} & d_{22} & d_{26} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} & d_{16} & d_{26} & d_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}, \quad (6.28)$$

dengan

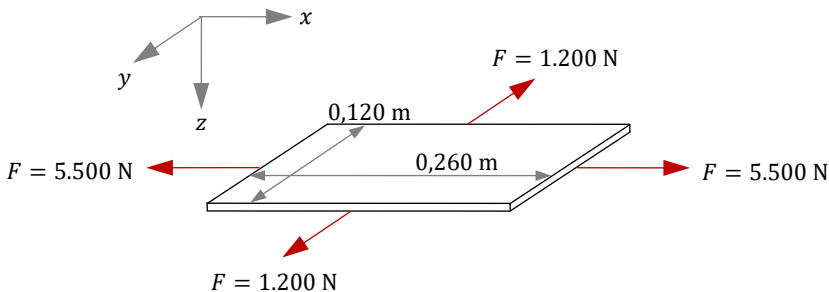
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} & b_{11} & b_{12} & b_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} & b_{12} & b_{22} & b_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} & b_{16} & b_{26} & b_{66} \\ b_{11} & b_{12} & b_{16} & d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} & d_{12} & d_{22} & d_{26} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} & d_{16} & d_{26} & d_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}^{-1}$$

Berdasarkan persamaan (6.28), jika resultan tegangan dan resultan momen yang bekerja diketahui, regangan yang dialami oleh permukaan referensi dapat ditentukan. Dengan demikian, berdasarkan konsep tegangan dan regangan yang sudah kita bahas pada Bab V, tegangan yang bekerja di sepanjang ketebalan laminat juga dapat ditentukan.

Contoh 6.1

Sebuah laminat dibuat dari lamina sejenis dengan susunan $(\pm 45/90/0)_S$. Sifat-sifat lamina penyusun diberikan oleh $E_1 = 145 \text{ GPa}$, $E_2 = 13 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0,25$, dan $G_{12} = 8 \text{ GPa}$. Diketahui bahwa laminat tersebut menerima gaya luar yang terdistribusi merata di sepanjang sisi laminat seperti ditunjukkan pada gambar di bawah. Selain itu, diketahui juga bahwa resultan momen yang dihasilkan gaya-gaya tersebut, yaitu M_x , M_y , dan M_{xy} sama dengan nol. Jika ketebalan setiap lapisan adalah $0,15 \text{ mm}$, tentukan parameter-parameter berikut:

- resultan tegangan yang bekerja pada laminat,
- matriks A , B , D , dan ABD dari laminat tersebut,
- distribusi regangan ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} dan tegangan σ_x , σ_y , τ_{xy} di sepanjang ketebalan laminat, dan
- distribusi regangan ϵ_1 , ϵ_2 , γ_{12} dan tegangan σ_1 , σ_2 , τ_{12} yang bekerja di sepanjang ketebalan laminat.



Jawab

- a) Laminat terdiri dari beberapa lapis lamina yang arah seratnya berbeda maka tegangan di sepanjang ketebalan laminat pun berbeda-beda. Oleh sebab itu, jika yang diketahui adalah gaya luar, kita tidak bisa langsung menentukan tegangan yang bekerja di sepanjang ketebalan laminat. Artinya, kita juga tidak bisa menentukan regangan yang bekerja di sepanjang ketebalan laminat dengan menggunakan konsep tentang hubungan antara tegangan dan regangan yang sudah kita bahas di Bab V.

Karena yang diketahui adalah gaya luar yang terdistribusi merata di sepanjang sisi laminat, untuk menentukan regangan yang dialami laminat, langkah pertama yang perlu dilakukan adalah menentukan terlebih dahulu resultan tegangan yang bekerja. Berdasarkan gambar, perhatikan bahwa karena panjang sisi yang mengarah ke sumbu x adalah 0,120 m, resultan tegangan N_x adalah

$$N_x = \frac{5.500 \text{ N}}{0,120 \text{ m}}$$

maka

$$N_x = 45.833,33 \text{ N/m.} \quad (\text{a})$$

Kemudian, karena panjang sisi yang mengarah ke sumbu y adalah 0,260 m, resultan tegangan N_y adalah

$$N_y = \frac{1.200 \text{ N}}{0,260 \text{ m}}$$

maka

$$N_y = 4.615,38 \text{ N/m.} \quad (\text{b})$$

Di setiap penampang laminat, gaya yang bekerja tegak lurus dengan penampang tersebut maka resultan tegangan $N_{xy} = 0$. Selain itu, kita juga mengetahui bahwa M_x , M_y , dan M_{xy} sama dengan nol.

- b) Berdasarkan persamaan (6.14), (6.15), dan (6.20), untuk menentukan matriks A , B , dan C , kita perlu terlebih dahulu menentukan matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi dari masing-masing lamina penyusun. Untuk menentukan matriks tersebut, kita perlu menentukan matriks kekakuan tereduksi dari lamina. Seperti yang sudah kita lakukan pada bab sebelumnya, berdasarkan data-data yang diberikan soal, matriks kekakuan tereduksi dari lamina adalah Q , yaitu

$$Q = \begin{bmatrix} 145,82 & 3,27 & 0 \\ 3,27 & 13,07 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \times 10^9 \text{ Pa.} \quad (\text{c})$$

Dengan demikian, seperti yang sudah kita lakukan pada bab sebelumnya, matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi dari lamina dengan serat arah 45° , -45° , 0° , dan 90° adalah $\bar{Q}(45^\circ)$, $\bar{Q}(-45^\circ)$, $\bar{Q}(0^\circ)$, dan $\bar{Q}(90^\circ)$, yaitu

$$\bar{Q}(45^\circ) = \begin{bmatrix} 49,36 & 33,36 & 33,19 \\ 33,36 & 49,36 & 33,19 \\ 33,19 & 33,19 & 38,09 \end{bmatrix} \times 10^9 \text{ Pa,} \quad (\text{d})$$

$$\bar{Q}(-45^\circ) = \begin{bmatrix} 49,36 & 33,36 & -33,19 \\ 33,36 & 49,36 & -33,19 \\ -33,19 & -33,19 & 38,09 \end{bmatrix} \times 10^9 \text{ Pa,} \quad (\text{e})$$

$$\bar{Q}(0^\circ) = \begin{bmatrix} 145,82 & 3,27 & 0 \\ 3,27 & 13,07 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \times 10^9 \text{ Pa,} \quad (\text{f})$$

$$\bar{Q}(90^\circ) = \begin{bmatrix} 13,07 & 3,27 & 0 \\ 3,27 & 145,82 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \times 10^9 \text{ Pa.} \quad (\text{g})$$

Kemudian, karena lamina terdiri dari delapan lapisan dan ketebalan setiap lamina adalah 0,15 mm, dapat dituliskan bahwa

$$z_0 = -0,00060 \text{ m,} \quad z_5 = 0,00015 \text{ m,}$$

$$z_1 = -0,00045 \text{ m,} \quad z_6 = 0,00030 \text{ m,}$$

$$z_2 = -0,00030 \text{ m,} \quad z_7 = 0,00045 \text{ m,}$$

$$z_3 = -0,00015 \text{ m,} \quad z_8 = 0,00060 \text{ m,}$$

$$z_4 = 0.$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (6.14), matriks A adalah

$$\begin{aligned}
 A &= \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k h_k \\
 &= \begin{bmatrix} 49,36 & 33,36 & 33,19 \\ 33,36 & 49,36 & 33,19 \\ 33,19 & 33,19 & 38,09 \end{bmatrix} \times 10^9 \times (0,15) \text{ Pa} \cdot \text{mm} \\
 &+ \begin{bmatrix} 49,36 & 33,36 & -33,19 \\ 33,36 & 49,36 & -33,19 \\ -33,19 & -33,19 & 38,09 \end{bmatrix} \times 10^9 \times (0,15) \text{ Pa} \cdot \text{mm} \\
 &+ \begin{bmatrix} 13,07 & 3,27 & 0 \\ 3,27 & 145,82 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \times 10^9 \times (0,15) \text{ Pa} \cdot \text{mm} \\
 &+ \begin{bmatrix} 145,82 & 3,27 & 0 \\ 3,27 & 13,07 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \times 10^9 \times (0,15) \text{ Pa} \cdot \text{mm} \\
 &+ \begin{bmatrix} 145,82 & 3,27 & 0 \\ 3,27 & 13,07 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \times 10^9 \times (0,15) \text{ Pa} \cdot \text{mm} \\
 &+ \begin{bmatrix} 13,07 & 3,27 & 0 \\ 3,27 & 145,82 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \times 10^9 \times (0,15) \text{ Pa} \cdot \text{mm} \\
 &+ \begin{bmatrix} 49,36 & 33,36 & -33,19 \\ 33,36 & 49,36 & -33,19 \\ -33,19 & -33,19 & 38,09 \end{bmatrix} \times 10^9 \times (0,15) \text{ Pa} \cdot \text{mm}
 \end{aligned}$$

$$+ \begin{bmatrix} 49,36 & 33,36 & 33,19 \\ 33,36 & 49,36 & 33,19 \\ 33,19 & 33,19 & 38,09 \end{bmatrix} \times 10^9 \times (0,15) \text{ Pa} \cdot \text{mm}$$

maka

$$A = \begin{bmatrix} 7,73 & 2,20 & 0 \\ 2,20 & 7,73 & 0 \\ 0 & 0 & 2,77 \end{bmatrix} \times 10^7 \text{ Pa} \cdot \text{m}. \quad (\text{h})$$

Kemudian, berdasarkan persamaan (6.15), matriks B adalah

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 49,36 & 33,36 & 33,19 \\ 33,36 & 49,36 & 33,19 \\ 33,19 & 33,19 & 38,09 \end{bmatrix} \times 10^9 \times [(-0,45)^2 - (-0,65)^2] \text{ Pa} \cdot \text{mm}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 49,36 & 33,36 & -33,19 \\ 33,36 & 49,36 & -33,19 \\ -33,19 & -33,19 & 38,09 \end{bmatrix} \times 10^9 \times [(-0,30)^2 - (-0,45)^2] \text{ Pa} \cdot \text{mm}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 13,07 & 3,27 & 0 \\ 3,27 & 145,82 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \times 10^9 \times [(-0,15)^2 - (0,30)^2] \text{ Pa} \cdot \text{mm}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 145,82 & 3,27 & 0 \\ 3,27 & 13,07 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \times 10^9 \times [(0)^2 - (-0,15)^2] \text{ Pa} \cdot \text{mm}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 145,82 & 3,27 & 0 \\ 3,27 & 13,07 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \times 10^9 \times [(0,15)^2 - (0)^2] \text{ Pa} \cdot \text{mm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 13,07 & 3,27 & 0 \\ 3,27 & 145,82 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \times 10^9 \times \left[(0,30)^2 - (0,15)^2 \right] \text{ Pa} \cdot \text{mm}^2 \\
& + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 49,36 & 33,36 & -33,19 \\ 33,36 & 49,36 & -33,19 \\ -33,19 & -33,19 & 38,09 \end{bmatrix} \times 10^9 \times \left[(0,45)^2 - (0,30)^2 \right] \text{ Pa} \cdot \text{mm}^2 \\
& + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 49,36 & 33,36 & 33,19 \\ 33,36 & 49,36 & 33,19 \\ 33,19 & 33,19 & 38,09 \end{bmatrix} \times 10^9 \times \left[(0,60)^2 - (0,45)^2 \right] \text{ Pa} \cdot \text{mm}^2
\end{aligned}$$

maka

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (i)$$

Berdasarkan persamaan (6.20), matriks D adalah

$$\begin{aligned}
D &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left(z_k^3 - z_{k-1}^3 \right) \\
&= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 49,36 & 33,36 & 33,19 \\ 33,36 & 49,36 & 33,19 \\ 33,19 & 33,19 & 38,09 \end{bmatrix} \times 10^9 \times \left[(-0,45)^3 - (-0,65)^3 \right] \text{ Pa} \cdot \text{mm}^2 \\
&+ \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 49,36 & 33,36 & -33,19 \\ 33,36 & 49,36 & -33,19 \\ -33,19 & -33,19 & 38,09 \end{bmatrix} \times 10^9 \times \left[(-0,30)^3 - (-0,45)^3 \right] \text{ Pa} \cdot \text{mm}^2 \\
&+ \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 13,07 & 3,27 & 0 \\ 3,27 & 145,82 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \times 10^9 \times \left[(-0,15)^3 - (0,30)^3 \right] \text{ Pa} \cdot \text{mm}^2
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 145,82 & 3,27 & 0 \\ 3,27 & 13,07 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \times 10^9 \times [(0)^3 - (-0,15)^3] \text{ Pa} \cdot \text{mm}^2$$

$$+ \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 145,82 & 3,27 & 0 \\ 3,27 & 13,07 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \times 10^9 \times [(0,15)^3 - (0)^3] \text{ Pa} \cdot \text{mm}^2$$

$$+ \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 13,07 & 3,27 & 0 \\ 3,27 & 145,82 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \times 10^9 \times [(0,30)^3 - (0,15)^3] \text{ Pa} \cdot \text{mm}^2$$

$$+ \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 49,36 & 33,36 & -33,19 \\ 33,36 & 49,36 & -33,19 \\ -33,19 & -33,19 & 38,09 \end{bmatrix} \times 10^9 \times [(0,45)^3 - (0,30)^3] \text{ Pa} \cdot \text{mm}^2$$

$$+ \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 49,36 & 33,36 & 33,19 \\ 33,36 & 49,36 & 33,19 \\ 33,19 & 33,19 & 38,09 \end{bmatrix} \times 10^9 \times [(0,60)^3 - (0,45)^3] \text{ Pa} \cdot \text{mm}^2$$

maka

$$D = \begin{bmatrix} 6,75 & 4,26 & 1,34 \\ 4,26 & 8,54 & 1,34 \\ 1,34 & 1,34 & 4,94 \end{bmatrix} \text{ Pa} \cdot \text{m}^3. \quad (\text{j})$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (6.27), matriks ABD dari laminat adalah

$$ABD = \begin{bmatrix} 7,73 \times 10^7 & 2,20 \times 10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,20 \times 10^7 & 7,73 \times 10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,77 \times 10^7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6,75 & 4,26 & 1,34 \\ 0 & 0 & 0 & 4,26 & 8,54 & 1,34 \\ 0 & 0 & 0 & 1,34 & 1,34 & 4,94 \end{bmatrix}. \quad (\text{k})$$

Ingat, satuan komponen matriks A adalah $(\text{Pa} \cdot \text{m})$ dan satuan komponen matriks B adalah $(\text{Pa} \cdot \text{m}^3)$.

- c) Kita sudah menentukan matriks ABD dari laminat sehingga dapat dituliskan bahwa

$$(ABD)^{-1} = \begin{bmatrix} 1,41 \times 10^{-8} & -4,00 \times 10^{-9} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4,00 \times 10^{-9} & 1,41 \times 10^{-8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3,62 \times 10^{-8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,22 & -0,11 & -0,03 \\ 0 & 0 & 0 & -0,11 & 0,17 & -0,02 \\ 0 & 0 & 0 & -0,03 & -0,02 & 0,22 \end{bmatrix} \cdot (1)$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (6.28), regangan bidang referensi dari laminat adalah

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,41 \times 10^{-8} & -4,00 \times 10^{-9} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4,00 \times 10^{-9} & 1,41 \times 10^{-8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3,62 \times 10^{-8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,22 & -0,11 & -0,03 \\ 0 & 0 & 0 & -0,11 & 0,17 & -0,02 \\ 0 & 0 & 0 & -0,03 & -0,02 & 0,22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 45.833,33 \\ 4.615,38 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 626,77 \times 10^{-6} \\ -118,50 \times 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (m)$$

Terlihat bahwa bidang referensi laminat hanya mengalami regangan normal ε_x^0 dan ε_y^0 .

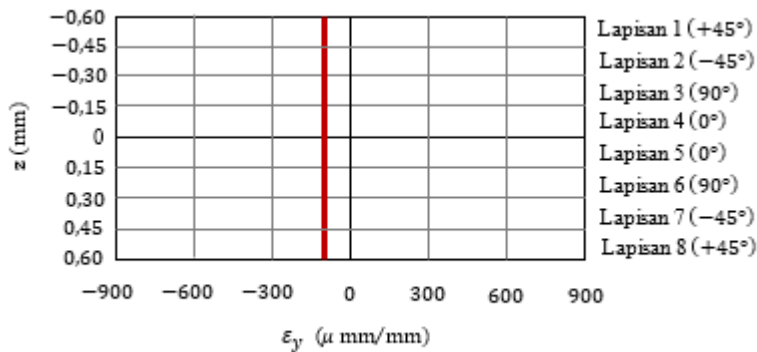
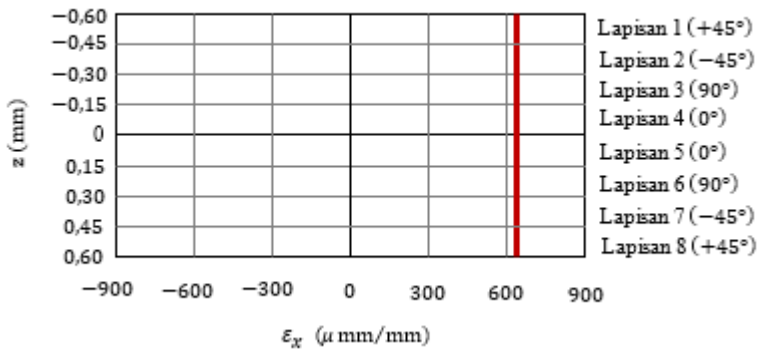
Selanjutnya, karena kita sudah mengetahui regangan bidang referensi laminat, berdasarkan persamaan (5.24), regangan di sepanjang ketebalan laminat adalah

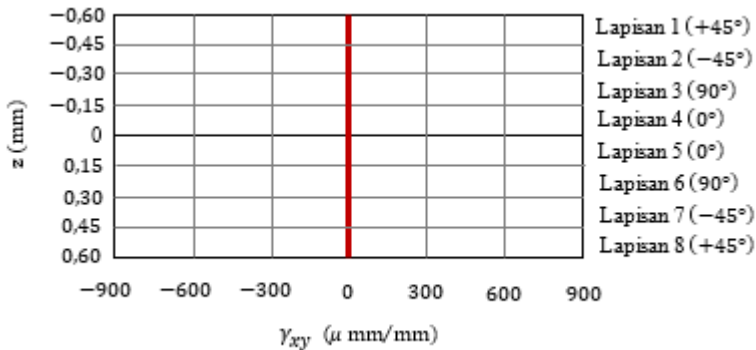
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (626,77 \times 10^{-6}) + z(0) \\ (-118,50 \times 10^{-6}) + z(0) \\ 0 + z(0) \end{bmatrix}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 626,77 \times 10^{-6} \\ -118,50 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (n)$$

Terlihat bahwa karena $\kappa_x^0 = \kappa_y^0 = \kappa_{xy}^0 = 0$, regangan ε_x dan ε_y bernilai konstan di sepanjang ketebalan laminat. Kemudian, seperti yang sudah kita lakukan pada bab sebelumnya, distribusi regangan ε_x , ε_y , dan γ_{xy} ditunjukkan pada gambar di bawah.





Selanjutnya, meskipun regangan ε_x , ε_y , dan γ_{xy} bernilai sama di sepanjang ketebalan laminat, ini bukan berarti bahwa tegangan juga bernilai sama di sepanjang ketebalan laminat karena laminat terdiri dari lamina-lamina dengan arah serat yang berbeda. Sekarang, mari kita tentukan dahulu tegangan yang bekerja pada lamina dengan serat arah 45° . Berdasarkan persamaan (d) dan persamaan (4.54), tegangan yang bekerja di sepanjang ketebalan lamina dengan serat arah 45° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49,36 & 33,36 & 33,19 \\ 33,36 & 49,36 & 33,19 \\ 33,19 & 33,19 & 38,09 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 626,77 \times 10^{-6} \\ -118,50 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^9 \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26,98 \\ 15,06 \\ 16,87 \end{bmatrix} \text{MPa.} \quad (o)$$

Berdasarkan persamaan (e), tegangan yang bekerja pada lamina dengan serat arah -45° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49,36 & 33,36 & -33,19 \\ 33,36 & 49,36 & -33,19 \\ -33,19 & -33,19 & 38,09 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 626,77 \times 10^{-6} \\ -118,50 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^9 \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26,98 \\ 15,06 \\ -16,87 \end{bmatrix} \text{MPa.} \quad (\text{p})$$

Berdasarkan persamaan (f), tegangan yang bekerja pada lamina dengan serat arah 0° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 145,82 & 3,27 & 0 \\ 3,27 & 13,07 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 626,77 \times 10^{-6} \\ -118,50 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^9 \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 91,00 \\ 0,50 \\ 0 \end{bmatrix} \text{MPa.} \quad (\text{q})$$

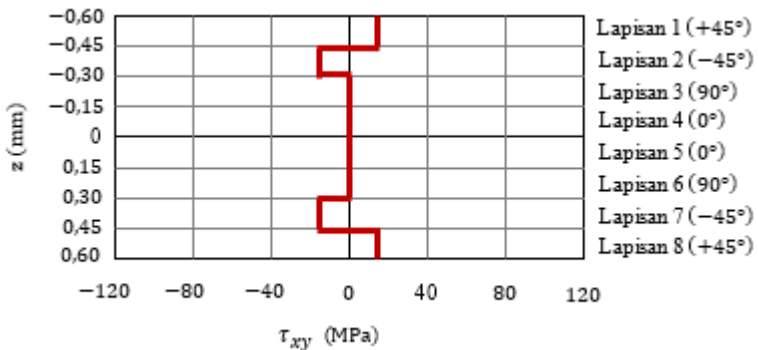
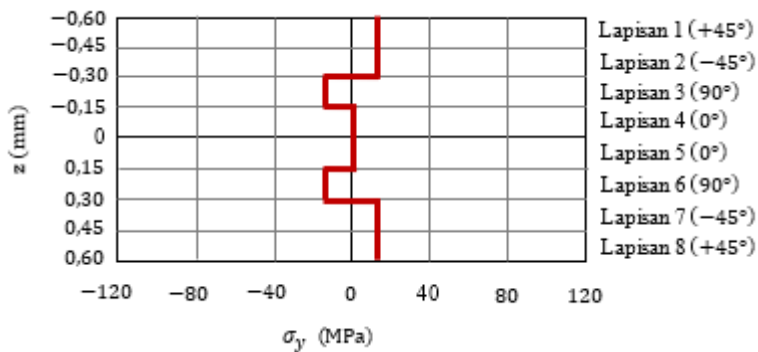
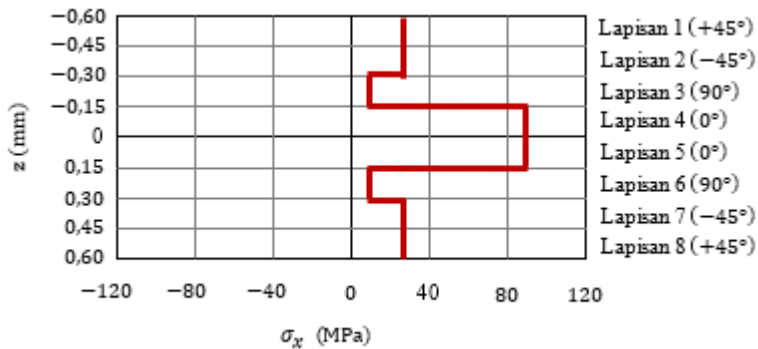
Sementara itu, berdasarkan persamaan (g), tegangan yang bekerja pada lamina dengan serat arah 90° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13,07 & 3,27 & 0 \\ 3,27 & 145,82 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 626,77 \times 10^{-6} \\ -118,50 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^9 \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,80 \\ -15,23 \\ 0 \end{bmatrix} \text{MPa.} \quad (\text{r})$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (o)–(r) seperti yang sudah kita lakukan pada bab sebelumnya, distribusi tegangan σ_x , σ_y , dan τ_{xy} yang bekerja di sepanjang ketebalan laminat dapat digambarkan seperti gambar berikut.



Kita sudah mengetahui regangan ε_x , ε_y , dan γ_{xy} serta tegangan σ_x , σ_y , dan τ_{xy} di sepanjang ketebalan laminat. Dengan demikian, kita dapat menentukan tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} serta regangan ε_1 , ε_2 , dan γ_{12} di sepanjang ketebalan laminat. Berdasarkan persamaan (o) dan (4.16), dengan $m = \cos(45^\circ)$ dan $n = \sin(45^\circ)$, tegangan yang dialami oleh lamina dengan serat arah 45° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26,98 \\ 15,06 \\ 16,87 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37,89 \\ 4,15 \\ -5,96 \end{bmatrix} \text{ MPa.} \quad (\text{s})$$

Berdasarkan persamaan (p), dengan $m = \cos(-45^\circ)$ dan $n = \sin(-45^\circ)$, tegangan yang dialami oleh lamina dengan serat arah -45° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26,98 \\ 15,06 \\ -16,87 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37,89 \\ 4,15 \\ 5,96 \end{bmatrix} \text{ MPa.} \quad (\text{t})$$

Berdasarkan persamaan (q), dengan $m = \cos(0)$ dan $n = \sin(0)$, tegangan yang dialami oleh lamina dengan serat arah 0° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 91,00 \\ 0,50 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 91,00 \\ 0,50 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ MPa.} \quad (\text{u})$$

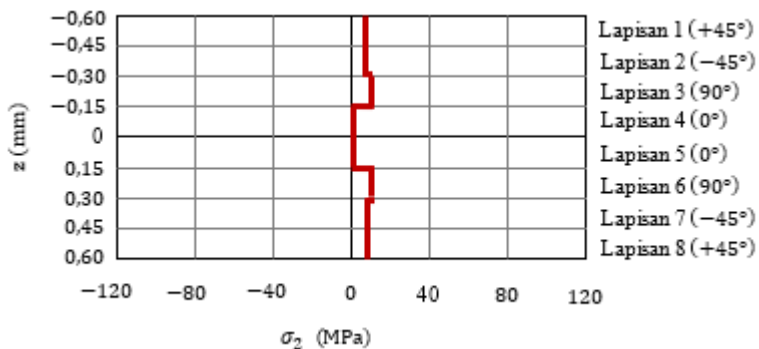
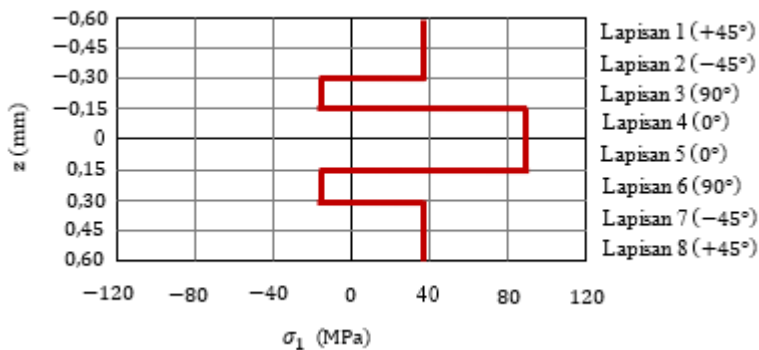
Sementara itu, berdasarkan persamaan (r), dengan $m = \cos(90^\circ)$ dan $n = \sin(90^\circ)$, tegangan yang dialami oleh lamina dengan serat arah 90° adalah

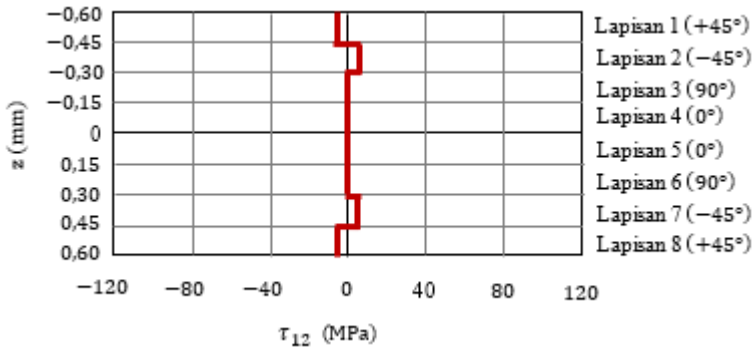
$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7,80 \\ -15,23 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15,23 \\ 7,80 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ MPa.} \quad (v)$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (s)–(v), distribusi tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} dapat digambarkan seperti pada gambar berikut.





Selanjutnya, karena kelengkungan laminat sama dengan nol, regangan semua lapisan diberikan oleh persamaan (n). Dengan demikian, berdasarkan persamaan (4.41), dengan $m = \cos(45^\circ)$ dan $n = \sin(45^\circ)$, regangan yang dialami oleh lamina dengan serat arah 45° adalah

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 626,77 \times 10^{-6} \\ -118,50 \times 10^{-6} \\ \frac{1}{2}(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 254,14 \times 10^{-6} \\ 254,14 \times 10^{-6} \\ -745,27 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \quad (w)$$

Kemudian, dengan $m = \cos(-45^\circ)$ dan $n = \sin(-45^\circ)$, regangan yang dialami oleh lamina dengan serat arah -45° adalah

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 626,77 \times 10^{-6} \\ -118,50 \times 10^{-6} \\ \frac{1}{2}(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 254,14 \times 10^{-6} \\ 254,14 \times 10^{-6} \\ 745,27 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \quad (x)$$

Selanjutnya, dengan $m = \cos(0^\circ)$ dan $n = \sin(0^\circ)$, regangan yang dialami oleh lamina dengan serat arah 0° adalah

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 626,77 \times 10^{-6} \\ -118,50 \times 10^{-6} \\ \frac{1}{2}(0) \end{bmatrix},$$

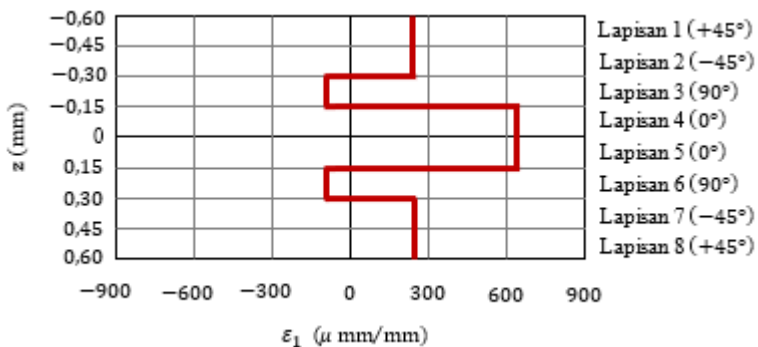
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 626,77 \times 10^{-6} \\ -118,50 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (y)$$

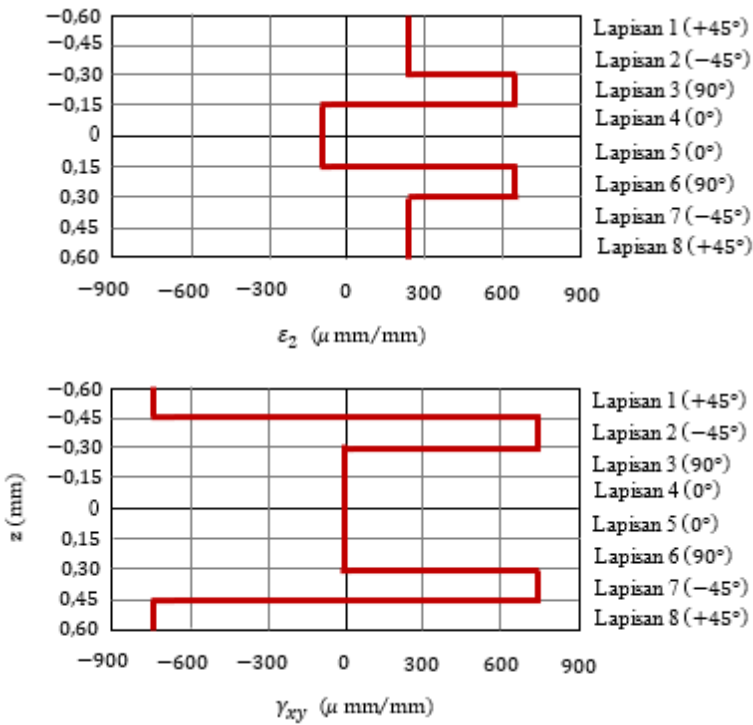
Sementara itu, dengan $m = \cos(90^\circ)$ dan $n = \sin(90^\circ)$, regangan yang dialami oleh lamina dengan serat arah 90° adalah

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 626,77 \times 10^{-6} \\ -118,50 \times 10^{-6} \\ \frac{1}{2}(0) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -118,50 \times 10^{-6} \\ 626,77 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (z)$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (w)–(z), distribusi regangan ε_1 , ε_2 , dan γ_{12} dapat digambarkan seperti gambar di bawah. Terlihat bahwa meskipun regangan ε_x , ε_y , dan γ_{xy} bernilai sama di sepanjang ketebalan laminat, regangan ε_1 , ε_2 , dan γ_{12} berbeda-beda di setiap lamina penyusun. Hal ini disebabkan oleh arah serat lamina penyusun yang berbeda-beda.



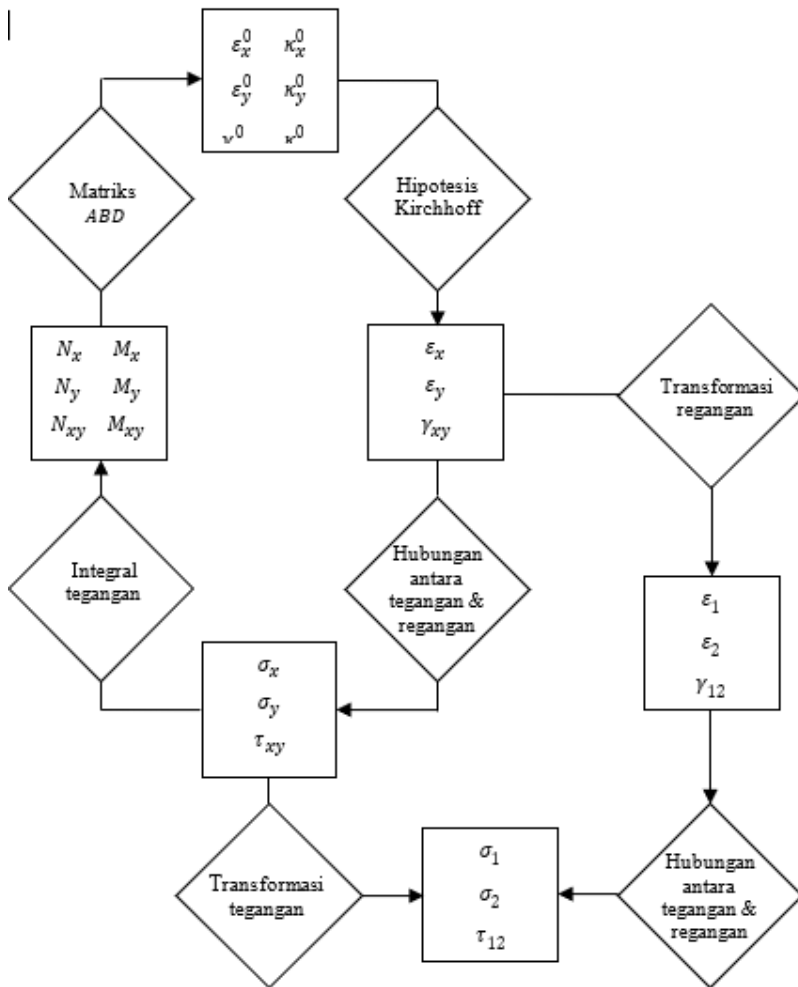


Dari contoh ini dapat dilihat bahwa jika yang diketahui adalah gaya luar yang bekerja, kita tidak bisa langsung menentukan tegangan yang bekerja di sepanjang ketebalan laminat. Akan tetapi, dengan pendefinisian besaran resultan tegangan dan resultan momen, dan juga dengan pendefinisian matriks ABD , regangan bidang referensi laminat dapat ditentukan.

Dengan telah ditentukannya regangan yang dialami oleh bidang referensi laminat, regangan dan tegangan di sepanjang ketebalan laminat, baik pada sistem koordinat utama maupun pada sistem koordinat global, dapat kita tentukan dengan cara yang sama dengan yang kita lakukan pada Bab V.

Sebelumnya keterkaitan konsep tegangan dan regangan dapat kita gambarkan seperti ditunjukkan pada gambar di Contoh 5.5. Sekarang, gambar tersebut dapat kita lengkapi seperti ditunjukkan pada gambar berikut. Pada gambar tersebut dapat dilihat bahwa resultan tegangan dan resultan momen dapat ditentukan dengan mengintegrasikan tegangan terhadap ketebalan. Kemudian, jika resultan tegangan dan resultan momen diketahui, dengan menggunakan konsep matriks ABD , regangan bidang referensi laminat dapat ditentukan.

Buku ini tidak diperjualbelikan.



F. Invers matriks ABD

Untuk menganalisis sifat mekanik suatu laminat, sebaiknya kita menuliskan invers matriks ABD dalam bentuk lain. Untuk itu, mari kita definisikan ε^0 , κ^0 , N , dan M sebagai

$$\varepsilon^0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix}, \quad (6.29)$$

$$\kappa^0 = \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix}, \quad (6.30)$$

$$N = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix}, \quad (6.31)$$

$$M = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}. \quad (6.32)$$

Dengan demikian, berdasarkan definisi matriks A , B , D , dan persamaan (6.29)–(6.32), persamaan (6.27) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa^0 \end{bmatrix}. \quad (6.33)$$

Kemudian, berdasarkan persamaan (6.33) dapat dituliskan bahwa

$$N = A\varepsilon^0 + B\kappa^0 \quad (6.34)$$

sehingga

$$A\varepsilon^0 = N - B\kappa^0. \quad (6.35)$$

Dengan mengalikan kedua ruas persamaan (6.35) dengan A^{-1} , diperoleh

$$\begin{aligned} A^{-1}A\varepsilon^0 &= A^{-1}(N - B\kappa^0), \\ \varepsilon^0 &= A^{-1}N - A^{-1}B\kappa^0. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Selanjutnya, berdasarkan persamaan (6.33), dapat dituliskan bahwa

$$M = B\varepsilon^0 + D\kappa^0. \quad (6.37)$$

Dengan menyubstitusikan persamaan (6.36) ke persamaan (6.37), diperoleh

$$M = B(A^{-1}N - A^{-1}B\kappa^0) + D\kappa^0$$

$$= BA^{-1}N - BA^{-1}B\kappa^0 + D\kappa^0$$

maka

$$M = BA^{-1}N + (D - BA^{-1}B)\kappa^0. \quad (6.38)$$

Dengan mendefinisikan A' , B' , C' , dan D' sebagai

$$A' = A^{-1}, \quad (6.39)$$

$$B' = -A^{-1}D, \quad (6.40)$$

$$C' = BA^{-1}, \quad (6.41)$$

$$D' = D - BA^{-1}B; \quad (6.42)$$

persamaan (6.36) dapat ditulis sebagai

$$\varepsilon^0 = A'N + B'\kappa^0 \quad (6.43)$$

dan persamaan (6.38) dapat ditulis sebagai

$$M = C'N + D'\kappa^0. \quad (6.44)$$

Selanjutnya, persamaan (6.44) dapat disusun ulang sebagai

$$D'\kappa^0 = M - C'N$$

sehingga dengan mengalikan kedua ruasnya dengan $(D')^{-1}$,

$$\begin{aligned} (D')^{-1}D'\kappa^0 &= (D')^{-1}(M - C'N), \\ \kappa^0 &= (D')^{-1}M - (D')^{-1}C'N. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Kemudian, dengan menyubstitusikan persamaan (6.45) ke persamaan (6.43), dapat dituliskan bahwa

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 &= A'N + B' \left[(D')^{-1}M - (D')^{-1}C'N \right] \\ &= A'N + B' (D')^{-1} M - B' (D')^{-1} C'N \end{aligned}$$

maka

$$\varepsilon^0 = \left[A' - B'(D')^{-1}C' \right] N + B'(D')^{-1}M. \quad (6.46)$$

Dengan demikian, persamaan (6.45) dan (6.46) dapat ditulis dalam bentuk yang padu, yaitu menjadi

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}, \quad (6.47)$$

dengan

$$A^* = A' - B'(D')^{-1}C', \quad (6.48)$$

$$B^* = B'(D')^{-1}, \quad (6.49)$$

$$C^* = (D')^{-1}C', \quad (6.50)$$

$$D^* = (D')^{-1}. \quad (6.51)$$

Dengan membandingkan persamaan (6.28) dengan persamaan (6.47), dapat disimpulkan bahwa

$$(ABD)^{-1} = \begin{bmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{bmatrix}. \quad (6.52)$$

Kemudian, berdasarkan persamaan (6.39)–(6.42), matriks A^* , B^* , C^* , dan D^* juga bisa ditulis sebagai

$$A^* = A^{-1} + A^{-1}D(D - BA^{-1}B)^{-1}BA^{-1}, \quad (6.53)$$

$$B^* = -A^{-1}D(D - BA^{-1}B)^{-1}, \quad (6.54)$$

$$C^* = (D - BA^{-1}B)^{-1}BA^{-1}, \quad (6.55)$$

$$D^* = (D - BA^{-1}B)^{-1}. \quad (6.56)$$

Contoh 6.2

Sebuah laminat dibuat dari lamina sejenis dengan susunan $(\pm 30)_T$. Sifat lamina penyusun adalah $E_1 = 150 \text{ GPa}$, $E_2 = 15 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0,25$, dan $G_{12} = 8 \text{ GPa}$. Diketahui bahwa resultan tegangan yang bekerja pada laminat tersebut adalah $N_x = 300 \text{ N/m}$, $N_y = 0$, dan $N_{xy} = 0$. Kemudian, resultan momen yang bekerja pada laminat tersebut adalah $M_x = M_y = M_{xy} = 0$. Jika ketebalan setiap lapisan adalah $0,30 \text{ mm}$, tentukan

- matriks A , B , dan D dari laminat tersebut,
- matriks A^* , B^* , C^* , dan D^* dari laminat tersebut, serta
- regangan yang dialami oleh bidang referensi laminat.

Jawab

- a) Seperti yang kita lakukan pada Contoh 6.1, untuk menentukan matriks A , B , dan D , kita perlu menentukan terlebih dahulu matriks kekakuan tereduksi lamina. Setelah itu, kita perlu menentukan matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi dari masing-masing lamina. Dengan demikian, berdasarkan persamaan (6.14), (6.15), dan (6.20), matriks A , B , dan D dari laminat adalah

$$A = \begin{bmatrix} 5,60 & 1,65 & 0 \\ 1,65 & 1,52 & 0 \\ 0 & 0 & 1,90 \end{bmatrix} \times 10^7 \text{ Pa} \cdot \text{m}, \quad (\text{a})$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3,88 \\ 0 & 0 & -1,41 \\ -3,88 & -1,41 & 0 \end{bmatrix} \times 10^7 \text{ Pa} \cdot \text{m}^2, \quad (\text{b})$$

$$D = \begin{bmatrix} 1,68 & 0,49 & 0 \\ 0,49 & 0,46 & 0 \\ 0 & 0 & 0,57 \end{bmatrix} \text{ Pa} \cdot \text{m}^3. \quad (\text{c})$$

- b) Untuk menentukan matriks A^* , B^* , C^* , dan D^* , kita perlu menentukan terlebih dahulu matriks A^{-1} . Berdasarkan persamaan (a), matriks A^{-1} adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2,63 & -2,85 & 0 \\ -2,85 & 9,67 & 0 \\ 0 & 0 & 5,25 \end{bmatrix} \times 10^{-8} \text{ Pa}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Dengan demikian, karena matriks A , B , dan D juga sudah diketahui, berdasarkan persamaan (6.53)–(6.46), matriks A^* , B^* , C^* , dan D^* adalah

$$A^* = \begin{bmatrix} 3,92 & -2,30 & 0 \\ -2,30 & 9,90 & 0 \\ 0 & 0 & 10,18 \end{bmatrix} \times 10^{-8} \text{ Pa}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}, \quad (\text{d})$$

$$B^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20,89 \\ 0 & 0 & 8,89 \\ 20,89 & 8,89 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-5} \text{ Pa}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}, \quad (\text{e})$$

$$C^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -20,89 \\ 0 & 0 & -8,89 \\ -20,89 & -8,89 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-5} \text{ Pa}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}, \quad (\text{f})$$

$$D^* = \begin{bmatrix} 1,30 & -0,77 & 0 \\ -0,77 & 3,30 & 0 \\ 0 & 0 & 3,39 \end{bmatrix} \text{ Pa}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}. \quad (\text{g})$$

- c) Karena kita sudah mengetahui A^* , B^* , C^* , dan D^* , regangan yang dialami bidang referensi dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (6.47), yaitu

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^*_{11} & A^*_{12} & A^*_{16} & B^*_{11} & B^*_{12} & B^*_{16} \\ A^*_{12} & A^*_{22} & A^*_{26} & B^*_{12} & B^*_{22} & B^*_{26} \\ A^*_{16} & A^*_{26} & A^*_{66} & B^*_{16} & B^*_{26} & B^*_{66} \\ B^*_{11} & B^*_{12} & B^*_{16} & D^*_{11} & D^*_{12} & D^*_{16} \\ B^*_{12} & B^*_{22} & B^*_{26} & D^*_{12} & D^*_{22} & D^*_{26} \\ B^*_{16} & B^*_{26} & B^*_{66} & D^*_{16} & D^*_{26} & D^*_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \text{ N/m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1,17 \times 10^{-5} \\ -6,91 \times 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -6,27 \times 10^{-6} \end{bmatrix}.$$

Berbeda dengan laminat pada Contoh 6.1, pada contoh ini resultan momen yang bekerja sama dengan nol, tetapi laminat tetap mengalami pemuntiran. Pada subbab berikutnya, kita akan melihat bahwa hal tersebut disebabkan oleh susunan laminat yang tidak simetris. Dengan demikian, ini berarti bahwa susunan lamina sangat berpengaruh terhadap sifat mekanik dari laminat.

G. Kopel pada Laminat

Pada Contoh 6.1, kita melihat bahwa meskipun tidak ada tegangan geser yang bekerja, laminat mengalami regangan geser. Kemudian, pada Contoh 6.2, kita melihat bahwa meskipun resultan momen yang bekerja sama dengan nol, laminat tetap mengalami pemuntiran. Artinya, terdapat kopel yang terjadi ketika gaya luar bekerja pada suatu laminat. Sekarang, mari kita bahas kopel-kopel yang terjadi pada suatu laminat ketika menerima gaya luar atau pembebanan.

Untuk meninjau kopel-kopel yang terjadi, perhatikan bahwa persamaan (6.27) dapat ditulis sebagai dua persamaan terpisah, yaitu

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

dan

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix}. \quad (6.58)$$

Berdasarkan persamaan (6.57) dan (6.58), dapat dilihat bahwa matriks A memberikan hubungan antara resultan tegangan dan regangan dari bidang

referensi; matriks D memberikan hubungan antara resultan momen dengan kelengkungan bidang referensi; matriks B memberikan hubungan antara resultan tegangan dengan kelengkungan bidang referensi dan hubungan antara resultan momen dan regangan bidang referensi.

Sekarang, misalkan laminat mengalami pembengkokan yang ditandai dengan adanya kelengkungan κ_x^0 yang terjadi di bidang referensi. Berdasarkan persamaan (6.57), perhatikan bahwa kelengkungan tersebut bisa saja disebabkan oleh resultan tegangan N_x karena komponen B_{11} pada matriks B . Artinya, meskipun resultan tegangan N_x arahnya adalah sejajar dengan bidang laminat, resultan tegangan tersebut juga bisa menyebabkan pembengkokan. Keterkaitan seperti ini disebut sebagai *kopel ekstensi dan pembengkokan*. Nanti kita akan membahas bahwa dengan menjadikan susunan laminat berupa susunan yang simetris, semua komponen matriks B sama dengan nol sehingga pembengkokan dan pemuntiran akibat tegangan bidang tidak terjadi. Secara lebih terperinci, pengaruh komponen-komponen matriks A , B , dan D ditunjukkan pada Tabel 6.1.

Tabel 6.1 Pengaruh Komponen-Komponen Matriks A , B , dan D terhadap Deformasi yang Terjadi

Komponen Matriks Kekauan	Hubungan antara:		Jenis Kopel
	Resultan Tegangan/ Resultan Momen	Regangan/ Kelengkungan	
A_{11}	N_x	ϵ_x^0	Tanpa kopel
A_{22}	N_y	ϵ_y^0	Tanpa kopel
A_{22}	N_y	ϵ_y^0	Tanpa kopel
A_{66}	N_{xy}	γ_{xy}^0	Tanpa kopel
A_{12}	N_x	ϵ_y^0	Kopel Poisson dan ekstensi
	N_y	ϵ_x^0	Kopel Poisson dan ekstensi
A_{16}	N_x	γ_{xy}^0	Kopel ekstensi dan regangan geser
	N_{xy}	ϵ_x^0	Kopel ekstensi dan regangan geser
A_{26}	N_y	γ_{xy}^0	Kopel ekstensi dan regangan geser
	N_{xy}	ϵ_y^0	Kopel ekstensi dan regangan geser
B_{11}	N_x	κ_x^0	Kopel ekstensi dan pembengkokan
	M_x	ϵ_x^0	Kopel ekstensi dan pembengkokan
B_{22}	N_y	κ_y^0	Kopel ekstensi dan pembengkokan
	M_y	ϵ_y^0	Kopel ekstensi dan pembengkokan

Buku ini tidak diperjualbelikan.

Komponen Matriks Kekakuan	Hubungan antara:		Jenis Kopel
	Resultan Tegangan/ Resultan Momen	Regangan/ Kelengkungan	
B_{66}	N_{xy}	κ_{xy}^0	Kopel ekstensi geser dan pemuntiran
	M_{xy}	γ_{xy}^0	Kopel ekstensi geser dan pemuntiran
B_{12}	N_x	κ_y^0	Kopel ekstensi -pembengkokan dan Poisson
	N_y	κ_x^0	Kopel ekstensi -pembengkokan dan Poisson
	M_x	ε_y^0	Kopel ekstensi -pembengkokan dan Poisson
B_{16}	M_y	ε_x^0	Kopel ekstensi -pembengkokan dan Poisson
	N_x	κ_{xy}^0	Kopel ekstensi -pemuntiran
	N_{xy}	κ_x^0	Kopel pembengkokan dan regangan geser
	M_x	γ_{xy}^0	Kopel pembengkokan dan regangan geser
B_{26}	M_{xy}	ε_x^0	Kopel ekstensi -pemuntiran
	N_y	κ_{xy}^0	Kopel ekstensi -pemuntiran
	N_{xy}	κ_y^0	Kopel pembengkokan dan regangan geser
	M_y	γ_{xy}^0	Kopel pembengkokan dan regangan geser
	M_{xy}	ε_y^0	Kopel ekstensi -pemuntiran
D_{11}	M_x	κ_x^0	Tanpa kopel
D_{22}	M_y	κ_y^0	Tanpa kopel
D_{66}	M_{xy}	κ_{xy}^0	Tanpa kopel
	M_x	κ_y^0	Kopel pembengkokan dan Poisson
D_{12}	M_y	κ_x^0	Kopel pembengkokan dan Poisson
	M_x	κ_{xy}^0	Kopel pembengkokan dan pemuntiran
D_{16}	M_{xy}	κ_x^0	Kopel pembengkokan dan pemuntiran
	M_y	κ_{xy}^0	Kopel pembengkokan dan pemuntiran
D_{26}	M_{xy}	κ_{xy}^0	Kopel pembengkokan dan pemuntiran
	M_{xy}	κ_y^0	Kopel pembengkokan dan pemuntiran

Selain itu, Perhatikan bahwa komponen bagian diagonal dari matriks A dan B tidak bernilai nol, yaitu $A_{11} \neq 0$, $A_{22} \neq 0$, $A_{66} \neq 0$, $D_{11} \neq 0$, $D_{22} \neq 0$, dan $A_{66} \neq 0$. Kemudian, komponen yang berkaitan dengan efek Poisson juga tidak sama dengan nol, yaitu $A_{12} \neq 0$ dan $D_{12} \neq 0$. Komponen matriks yang lain bisa saja bernilai nol berdasarkan susunan laminatnya. Dengan demikian, dalam desain laminat, jika banyak komponen matriks yang nol, perhitungan menjadi lebih sederhana. Selain itu, efek kopel dapat dihindari sehingga analisis menjadi lebih mudah.

H. Laminat Simetris

Kita sudah membahas bahwa makin banyak komponen matriks ABD yang bernilai nol maka akan makin banyak kopel yang tidak terjadi. Salah satu kopel yang sering dihindari adalah kopel yang disebabkan oleh komponen-komponen matriks B . Kita sudah melihat pada Contoh 6.2 dan Tabel 6.1, ketika komponen-komponen matriks B dari suatu laminat tidak sama dengan nol, tegangan bidang dapat menyebabkan terjadinya pemuntiran atau pembengkokan. Perlu diketahui bahwa ketika dalam proses fabrikasi, ada laminat yang perlu dipanaskan dalam suhu yang cukup tinggi dan kemudian didinginkan kembali. Kemudian, nanti pada Bab VIII, kita akan membahas bahwa perubahan suhu dapat menyebabkan terjadinya tegangan termal yang arahnya sejajar dengan bidang laminat. Artinya, jika matriks komponen-komponen matriks B dari suatu laminat tidak sama dengan nol, tegangan termal selama proses fabrikasi dapat menyebabkan terjadinya pembengkokan atau pemuntiran pada laminat.

Jika komponen-komponen matriks B sama dengan nol seperti pada Contoh 6.1, tegangan bidang tidak menyebabkan terjadinya pembengkokan. Penyebab komponen-komponen matriks B sama dengan nol pada Contoh 6.1 sebetulnya adalah susunan lamina dari laminat tersebut yang simetris. Oleh sebab itu, susunan simetris sering digunakan dalam membuat suatu laminat.

Apa sebetulnya yang dimaksud dengan laminat simetris? Laminat simetris merupakan laminat yang memiliki sifat material dan geometri yang simetris terhadap bidang referensi. Dengan kata lain, setiap lamina dengan sifat tertentu, arah tertentu dan ketebalan tertentu pada jarak z dari bidang referensi, terdapat lamina dengan sifat yang sama, arah yang sama dan ketebalan yang sama pada jarak $(-z)$ dari bidang referensi. Jumlah lamina penyusun pada laminat simetris bisa genap atau ganjil. Jika jumlah lamina penyusun ganjil, kita dapat mendefinisikan bidang referensi berada di tengah-tengah lamina yang berada di tengah-tengah laminat.

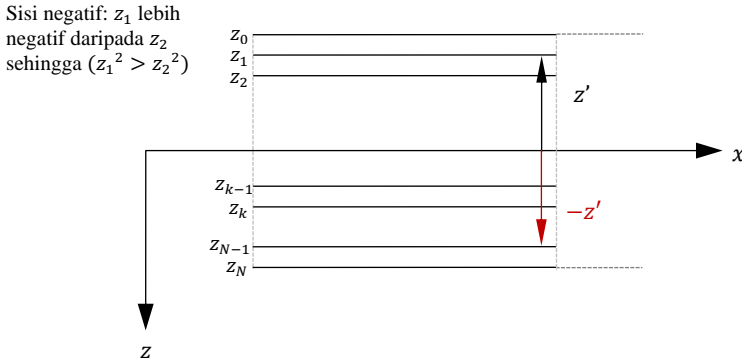
Sekarang, mari kita bahas alasan semua komponen matriks B pada laminat simetris sama dengan nol. Berdasarkan Gambar 6.5, terlihat bahwa pada sisi z negatif, $|z_k| < |z_{k-1}|$ sehingga $(z_k^2 - z_{k-1}^2) < 0$. Sementara itu, pada sisi z positif, $|z_k| > |z_{k-1}|$ sehingga $(z_k^2 - z_{k-1}^2) > 0$. Karena ketebalan lamina yang berpasangan bernilai sama, dapat dituliskan bahwa

$$\left(z_k^2 - z_{k-1}^2\right)_{z-} = -\left(z_k^2 - z_{k-1}^2\right)_{z+}; \quad (6.59)$$

dengan ruas kiri merupakan $(z_k^2 - z_{k-1}^2)$ dari lamina yang berada di sisi z negatif dan berjarak sejauh z' dari bidang referensi dan ruas kanannya merupakan $(z_k^2 - z_{k-1}^2)$ dari lamina yang berada di sisi z positif dan berjarak sejauh z' dari bidang referensi. Dengan demikian, matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi dari kedua pasang lamina tersebut adalah sama maka

berdasarkan persamaan (6.15), kedua lamina tersebut akan saling menghilangkan sehingga dapat dituliskan bahwa

$$B = 0. \quad (6.60)$$



Gambar 6.5 Laminat Simetris

Kemudian, karena pada laminat simetris semua komponen matriks B sama dengan nol, persamaan (6.57) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad (6.61)$$

dan persamaan (6.58) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix}. \quad (6.62)$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (6.61) dan (6.62), pada laminat simetris, dapat dilihat bahwa pembengkokan hanya mungkin disebabkan oleh resultan momen. Jika hanya resultan tegangan yang bekerja, resultan tegangan tersebut hanya akan menyebabkan regangan normal atau regangan geser.

Kemudian, berdasarkan persamaan (6.54) dan (6.55), karena $B = 0$, matriks $B^* = C^* = 0$. Dengan demikian, berdasarkan persamaan (6.47), pada laminat simetris dapat dituliskan bahwa

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & A_{16}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & A_{26}^* \\ A_{16}^* & A_{26}^* & A_{66}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} \quad (6.63)$$

dan

$$\begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ D_{12}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ D_{16}^* & D_{26}^* & D_{66}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}. \quad (6.64)$$

Selain itu, berdasarkan persamaan (6.53) dan (6.56), karena $B = 0$, $A^* = A^{-1}$ dan $D^* = D^{-1}$.

I. Modulus Young Laminat

Untuk mendeskripsikan seberapa elastis suatu laminat, kita juga bisa mendefinisikan modulus Young dari laminat tersebut. Untuk mendefinisikan modulus Young tersebut, karena tegangan di sepanjang ketebalan laminat berbeda-beda, kita perlu terlebih dahulu untuk mendefinisikan besaran *tegangan rata-rata*. Resultan tegangan adalah integral dari tegangan terhadap ketebalan maka tegangan rata-rata pada arah x dan y , yang misalkan disimbolkan sebagai $\bar{\sigma}_x$ dan $\bar{\sigma}_y$, didefinisikan sebagai

$$\bar{\sigma}_x = \frac{N_x}{H}, \quad (6.65)$$

$$\bar{\sigma}_y = \frac{N_y}{H}. \quad (6.66)$$

Kemudian, tegangan geser rata-rata yang misalkan disimbolkan sebagai $\bar{\tau}_{xy}$, didefinisikan sebagai

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{N_{xy}}{H}. \quad (6.67)$$

Dengan demikian, dapat dituliskan bahwa

$$N_x = H \bar{\sigma}_x, \quad (6.68)$$

$$N_y = H \bar{\sigma}_y, \quad (6.69)$$

$$N_{xy} = H \bar{\tau}_{xy}. \quad (6.70)$$

Sekarang, mari kita tentukan rumusan modulus Young dari suatu laminat. Karena laminat simetris memiliki keunggulan, yaitu tidak mengalami pembengkokan dan pemuntiran akibat tegangan bidang, kita akan memfokuskan pembahasan kita pada laminat simetris tersebut. Berdasarkan persamaan (6.68)–(6.70), persamaan (6.63) dapat dituliskan sebagai

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & A_{16}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & A_{26}^* \\ A_{16}^* & A_{26}^* & A_{66}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \bar{\sigma}_x \\ H \bar{\sigma}_y \\ H \bar{\tau}_{xy} \end{bmatrix}. \quad (6.71)$$

Ketika satu-satunya tegangan yang bekerja adalah tegangan pada arah x , modulus Young pada arah x adalah E_x , yaitu

$$E_x = \frac{\bar{\sigma}_x}{\varepsilon_x^0}. \quad (6.72)$$

Kemudian, berdasarkan persamaan (6.71), jika satu-satunya tegangan yang bekerja adalah $\bar{\sigma}_x$, sedangkan $\bar{\sigma}_y = \bar{\tau}_{xy} = 0$, dapat dituliskan bahwa

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= a_{11} H \bar{\sigma}_x, \\ \frac{1}{a_{11} H} &= \frac{\bar{\sigma}_x}{\varepsilon_x^0}. \end{aligned} \quad (6.73)$$

Dengan demikian, dengan membandingkan persamaan (6.72) dengan persamaan (6.73), dapat disimpulkan bahwa modulus Young pada arah x dari laminat adalah

$$E_x = \frac{1}{A_{11}^* H}. \quad (6.74)$$

Selanjutnya, ketika satu-satunya tegangan yang bekerja adalah tegangan pada arah y , modulus Young pada arah y didefinisikan sebagai E_y , yaitu

$$E_y = \frac{\bar{\sigma}_y}{\varepsilon_y^0}. \quad (6.75)$$

Berdasarkan persamaan (6.71), jika satu-satunya tegangan yang bekerja adalah $\bar{\sigma}_y$, sedangkan $\bar{\sigma}_x = \bar{\tau}_{xy} = 0$, dapat dituliskan bahwa

$$\varepsilon_y^0 = A_{22}^* H \bar{\sigma}_y,$$

$$\frac{1}{A_{22}^* H} = \frac{\bar{\sigma}_y}{\varepsilon_y^0}. \quad (6.76)$$

Dengan demikian, dengan membandingkan persamaan (6.75) dengan persamaan (6.76), dapat disimpulkan bahwa modulus Young pada arah y dari laminat adalah

$$E_y = \frac{1}{A_{22}^* H}. \quad (6.77)$$

Contoh 6.3

Tentukan modulus Young E_x dan E_y dari laminat pada Contoh 6.1.

Jawab

Untuk menentukan modulus Young E_x dan E_y dari laminat pada Contoh 6.1, kita perlu terlebih dahulu menentukan matriks A^* dari laminat tersebut. Cara menentukan matriks tersebut adalah seperti yang kita lakukan pada Contoh 6.2. Akan tetapi, laminat pada Contoh 6.1 merupakan laminat simetris maka $A^* = A^{-1}$. Dengan demikian, berdasarkan matriks A dan A^{-1} yang sudah kita tentukan pada Contoh 6.1, karena, $A^* = A^{-1}$, matriks A^* adalah

$$A^* = A^{-1} = \begin{bmatrix} 1,41 & -0,40 & 0 \\ -0,40 & 1,41 & 0 \\ 0 & 0 & 3,62 \end{bmatrix} \times 10^{-8} \text{ Pa}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}. \quad (a)$$

Laminat tersebut terdiri dari delapan lapis lamina dan masing-masing lamina memiliki ketebalan sebesar 0,0012 m. Dengan demikian, berdasarkan persamaan (6.74), modulus Young E_x adalah

$$E_x = \frac{1}{A_{11}^* H} = \frac{1}{(1,41 \times 10^{-8})(0,0012)} \text{ Pa}$$

$$= 59,10 \text{ GPa}.$$

Sementara itu, berdasarkan persamaan (6.77), modulus Young E_y adalah

$$E_y = \frac{1}{A_{12}^* H} = \frac{1}{(1,41 \times 10^{-8})(0,0012)} \text{ Pa}$$

$$= 59,10 \text{ GPa.}$$

Terlihat bahwa pada laminat dengan susunan seperti ini, modulus Young E_x dan E_y dari laminat bernilai sama.

J. Modulus Geser Laminat

Sekarang, mari kita tentukan modulus geser dari laminat simetris. Ketika satu-satunya tegangan yang bekerja adalah tegangan geser, modulus geser dari suatu laminat didefinisikan sebagai G_{xy} , yaitu

$$G_{xy} = \frac{\bar{\tau}_{xy}}{\gamma_{xy}^0}. \quad (6.78)$$

Kemudian, berdasarkan persamaan (6.71), jika satu-satunya tegangan yang bekerja adalah tegangan geser, sedangkan $\bar{\sigma}_x = \bar{\sigma}_y = 0$, dapat dituliskan bahwa

$$\gamma_{xy}^0 = A_{66}^* H \bar{\tau}_{xy},$$

$$\frac{1}{A_{66}^* H} = \frac{\bar{\tau}_{xy}}{\gamma_{xy}^0}. \quad (6.79)$$

Dengan demikian, dengan membandingkan persamaan (6.78) dengan persamaan (6.79), dapat disimpulkan bahwa modulus geser dari laminat adalah

$$G_{xy} = \frac{1}{A_{66}^* H}. \quad (6.80)$$

Contoh 6.4

Tentukan modulus geser dari laminat pada Contoh 6.1.

Jawab

Kita sudah menentukan matriks A^* dari laminat pada Contoh 6.3. Dengan demikian, berdasarkan persamaan (6.80), modulus geser dari laminat adalah

$$G_{xy} = \frac{1}{A_{66}^* H} = \frac{1}{(3,62 \times 10^{-8})(0,0012)} \text{ Pa}$$

$$= 23,02 \text{ GPa.}$$

K. Rasio Poisson Laminat

Sekarang, mari kita tentukan rasio Poisson ν_{xy} dari laminat simetris. Ketika satu-satunya tegangan yang bekerja adalah tegangan $\bar{\sigma}_x$, rasio Poisson ν_{xy} dari suatu laminat didefinisikan sebagai

$$\nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_x^0}{\varepsilon_y^0}. \quad (6.81)$$

Berdasarkan persamaan (6.71), jika satu-satunya tegangan yang bekerja adalah $\bar{\sigma}_x$, sedangkan $\bar{\sigma}_y = \bar{\tau}_{xy} = 0$, dapat dituliskan bahwa

$$\varepsilon_x^0 = A_{11}^* H \bar{\sigma}_x \quad (6.82)$$

dan

$$\varepsilon_y^0 = A_{12}^* H \bar{\sigma}_x. \quad (6.83)$$

Dengan demikian, rasio Poisson ν_{xy} dapat ditulis sebagai

$$\nu_{xy} = -\frac{A_{12}^* H \bar{\sigma}_x}{A_{11}^* H \bar{\sigma}_x}$$

maka

$$\nu_{xy} = -\frac{A_{12}^*}{A_{11}^*}. \quad (6.84)$$

Contoh 6.5

Tentukan rasio Poisson ν_{xy} dari laminat pada Contoh 6.1.

Jawab

Berdasarkan persamaan (6.84) dan matriks A^* yang sudah ditentukan pada Contoh 6.3, rasio Poisson ν_{xy} dari laminat pada Contoh 6.1 adalah

$$\nu_{xy} = -\frac{A_{12}^*}{A_{11}^*} = -\frac{-0,40 \times 10^{-8} \text{ Pa}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}}{1,41 \times 10^{-8} \text{ Pa}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}}$$

$$\nu_{xy} = 0,28.$$

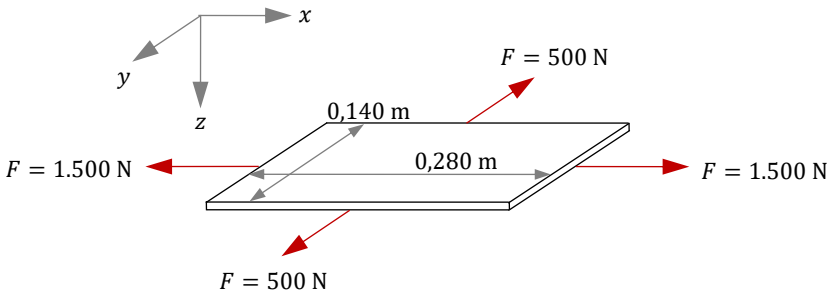
Soal-soal

1. Sebuah laminat dibuat dari lamina sejenis dengan susunan $(\pm 30/0)_S$. Sifat-sifat lamina penyusunnya adalah $E_1 = 120 \text{ GPa}$, $E_2 = 10 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0,25$, dan $G_{12} = 8 \text{ GPa}$. Diketahui bahwa bidang referensi dari laminat tersebut mengalami regangan berupa

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,4 \times 10^{-5} \\ 1,55 \times 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1,30 \times 10^{-6} \end{bmatrix}.$$

- Jika ketebalan setiap lapisan adalah 0,15 mm, tentukan resultan tegangan dan resultan momen yang bekerja pada laminat tersebut.
2. Tentukan modulus Young, modulus geser, dan rasio Poisson ν_{xy} dari laminat pada soal nomor 1.
 3. Sebuah laminat dibuat dari lamina sejenis dengan susunan $(0/90/0)_S$. Sifat lamina penyusun adalah $E_1 = 155 \text{ GPa}$, $E_2 = 15 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0,25$, dan $G_{12} = 8 \text{ GPa}$. Diketahui bahwa laminat tersebut menerima gaya luar yang terdistribusi merata di sepanjang sisi laminat seperti ditunjukkan pada gambar di bawah. Selain itu, diketahui juga bahwa resultan momen yang dihasilkan gaya-gaya tersebut, yaitu M_x , M_y , dan M_{xy} , sama dengan nol. Jika ketebalan setiap lapisan adalah 0,15 mm, tentukan

- resultan tegangan yang bekerja pada laminat,
- matriks A , B , C dan ABD dari laminat tersebut,
- distribusi regangan ε_x , ε_y , γ_{xy} dan tegangan σ_x , σ_y , τ_{xy} di sepanjang ketebalan laminat, dan
- distribusi regangan ε_1 , ε_2 , γ_{12} dan tegangan σ_1 , σ_2 , τ_{12} yang bekerja di sepanjang ketebalan laminat.

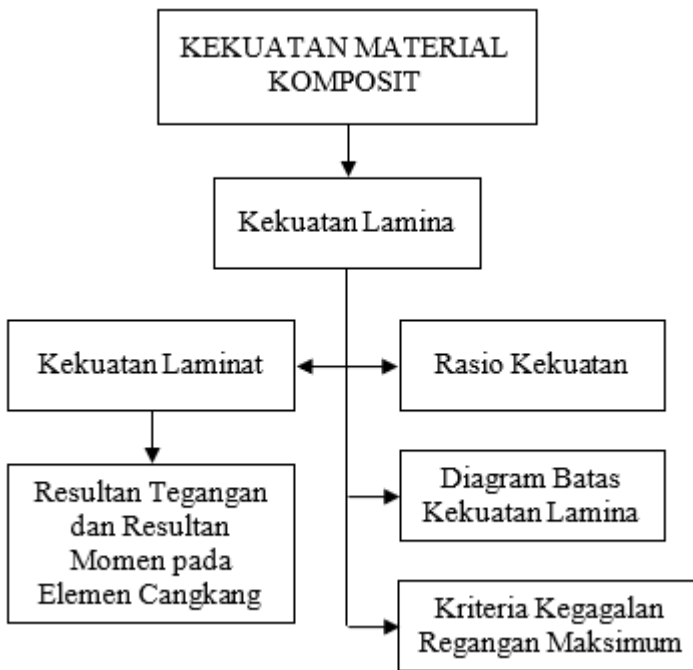


- Tentukan modulus Young, modulus geser, dan rasio Poisson ν_{xy} dari laminat pada soal nomor 3.
- Tentukan rasio Poisson ν_{yx} dari laminat pada soal nomor 3.

BAB VII

KEKUATAN MATERIAL KOMPOSIT

Pada bab-bab sebelumnya, kita membahas respons suatu lamina atau laminat ketika menerima gaya dari luar. Berdasarkan konsep-konsep yang sudah kita bahas tersebut, kita bisa menentukan tegangan yang bekerja pada material komposit, baik lamina maupun laminat. Dalam pengaplikasiannya, tentu tegangan yang bekerja tidak boleh melebihi tegangan maksimum yang mampu ditahan oleh material komposit tersebut.



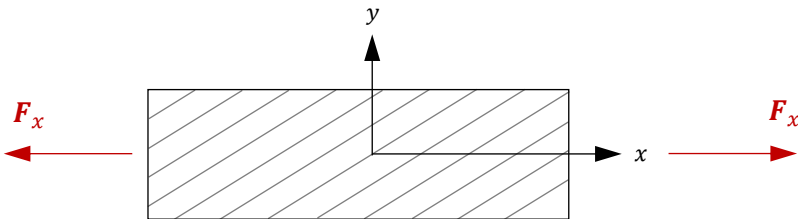
Gambar 7.1 Peta Konsep Bab 7

Sebagaimana peta konsep pada Gambar 7.1, pada bab ini, kita akan membahas konsep tentang kekuatan material komposit, baik kekuatan lamina maupun laminat. Kekuatan material komposit merupakan tegangan maksimum yang mampu ditahan oleh material tersebut. Untuk menentukan kekuatan atau tegangan maksimum tersebut, sebetulnya terdapat beberapa teori yang dapat digunakan. Namun, di buku ini, kita akan menggunakan teori yang cukup intuitif, yaitu teori yang disebut sebagai teori *kriteria kegagalan tegangan*

maksimum. Kita akan menggunakan kriteria kegagalan tegangan maksimum tersebut untuk memperkirakan kekuatan lamina dan laminat. Kemudian, kita juga akan membahas teori *kriteria kegagalan regangan maksimum* untuk memprediksi kekuatan material komposit.

A. Kekuatan Lamina

Ketika lamina ditarik oleh gaya F_x (Gambar 7.2) yang makin membesar dan tidak lagi mampu menahan tegangan yang bekerja, lamina tersebut mengalami kegagalan. Tentu besar gaya F_x ketika kegagalan sangat dipengaruhi oleh arah serat θ . Gaya F_x yang dibutuhkan untuk menyebabkan kegagalan ketika $\theta = 0$ lebih besar dibandingkan ketika $\theta > 0$ atau $\theta < 0$.



Gambar 7.2 Lamina yang Ditarik oleh Gaya F_x

Untuk menentukan tegangan maksimum yang bekerja ketika sebuah lamina mengalami kegagalan, kita bisa menggunakan teori kriteria kegagalan maksimum. Berdasarkan teori tersebut, suatu lamina akan mengalami kegagalan jika memenuhi kondisi-kondisi berikut.

- 1) Tegangan tarik yang dialami lamina pada arah 1 melebihi tegangan tarik yang mampu ditahannya pada arah tersebut.
- 2) Tegangan tekan yang dialami lamina pada arah 1 melebihi tegangan tekan yang mampu ditahannya pada arah tersebut.
- 3) Tegangan tarik yang dialami lamina pada arah 2 melebihi tegangan tarik yang mampu ditahannya pada arah tersebut.
- 4) Tegangan tekan yang dialami lamina pada arah 2 melebihi tegangan tarik yang mampu ditahannya pada arah tersebut.
- 5) Tegangan geser yang dialami lamina melebihi tegangan geser yang mampu ditahan oleh lamina tersebut.

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa suatu laminat tidak akan mengalami kegagalan jika tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} yang bekerja pada lamina memenuhi kriteria berikut:

$$\sigma_1^{\text{tek}} < \sigma_1 < \sigma_1^{\text{tar}}, \quad (7.1)$$

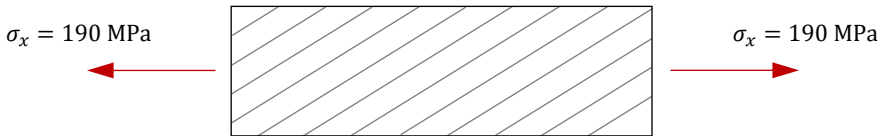
$$\sigma_2^{\text{tek}} < \sigma_2 < \sigma_2^{\text{tar}}, \quad (7.2)$$

$$|\tau_{12}| < \tau_{12}^{\text{maks}}. \quad (7.3)$$

Besaran σ_1^{tek} dan σ_1^{tar} secara berturut-turut adalah tegangan tekan dan tegangan tarik maksimum pada arah 1. Kemudian, σ_2^{tek} dan σ_2^{tar} secara berturut-turut adalah tegangan tekan dan tegangan tarik maksimum pada arah 2, sedangkan τ_{12}^{maks} merupakan besar tegangan geser maksimum. Kegagalan suatu lamina ditentukan oleh tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} maka untuk menentukan apakah lamina mengalami kegagalan ketika menerima gaya luar, kita perlu menentukan tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} yang bekerja pada lamina.

Contoh 7.1

Sebuah lamina karbon/epoksi dengan serat arah 30° menerima tegangan seperti ditunjukkan pada gambar di bawah, sedangkan $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$. Periksa apakah lamina tersebut mengalami kegagalan atau tidak jika kekuatan lamina tersebut diberikan oleh $\sigma_1^{\text{tek}} = -750$ MPa, $\sigma_1^{\text{tar}} = 1.800$ MPa, $\sigma_2^{\text{tek}} = -160$ MPa, $\sigma_2^{\text{tar}} = 50$ MPa, dan $\tau_{12}^{\text{maks}} = 80$ MPa.



Jawab

Berdasarkan kriteria (7.1)–(7.3), tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} yang bekerja harus di dalam rentang batas kekuatan lamina tersebut, yaitu

$$\begin{bmatrix} -750 \text{ MPa} \\ -160 \text{ MPa} \\ -80 \text{ MPa} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 1.800 \text{ MPa} \\ 50 \text{ MPa} \\ 80 \text{ MPa} \end{bmatrix}.$$

Karena kegagalan lamina bergantung pada tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} , kita perlu terlebih dahulu untuk mentransformasikan tegangan yang dialami lamina ke sistem koordinat utama. Dengan $m = \cos(30^\circ)$ dan $n = \sin(30^\circ)$, tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} yang dialami lamina adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 190 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 142,50 \\ 47,50 \\ -82,27 \end{bmatrix} \text{ Mpa.} \quad (\text{a})$$

Terlihat bahwa tegangan σ_1 dan σ_2 yang bekerja masih berada di dalam rentang batas kekuatan lamina. Akan tetapi, tegangan τ_{12} yang bekerja sudah melewati rentang batas kekuatan tersebut. Artinya, ketika lamina menerima tegangan tarik σ_x sebesar 190 MPa, lamina tersebut mengalami kegagalan akibat tidak mampu menahan tegangan geser τ_{12} yang bekerja.

Contoh 7.2

Jika lamina pada Contoh 7.1 hanya menerima tegangan geser, tentukan besar tegangan geser maksimum yang mampu ditahan oleh lamina tersebut.

Jawab

Karena tegangan yang bekerja hanya tegangan geser, ini berarti bahwa $\sigma_x = 0$ dan $\sigma_y = 0$. Kemudian, dengan $m = \cos(30^\circ)$ dan $n = \sin(30^\circ)$, tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} yang dialami lamina tersebut adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,87 \tau_{xy} \\ -0,87 \tau_{xy} \\ 0,5 \tau_{xy} \end{bmatrix}. \quad (\text{a})$$

Berdasarkan data kekuatan lamina, dapat dituliskan bahwa

$$\begin{bmatrix} -750 \text{ MPa} \\ -160 \text{ MPa} \\ -80 \text{ MPa} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0,87 \tau_{xy} \\ -0,87 \tau_{xy} \\ 0,5 \tau_{xy} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 1.800 \text{ MPa} \\ 50 \text{ MPa} \\ 80 \text{ MPa} \end{bmatrix}$$

atau

$$\begin{bmatrix} -862,07 \text{ MPa} \\ -57,47 \text{ MPa} \\ -160 \text{ MPa} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 2.068,97 \text{ MPa} \\ 183,91 \text{ MPa} \\ 160 \text{ MPa} \end{bmatrix}. \quad (\text{b})$$

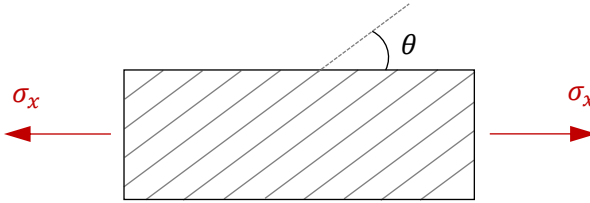
Berdasarkan persamaan (a), baris pertama, kedua, dan ketiga pada pertidaksamaan (b) secara berturut-turut menunjukkan batas tegangan geser yang dapat bekerja supaya lamina tidak mengalami kegagalan akibat tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} . Kemudian, berdasarkan pertidaksamaan (b), dapat dilihat bahwa tegangan geser negatif maksimum yang dapat ditahan oleh lamina adalah $\tau_{xy} = -57,47 \text{ MPa}$ dan tegangan geser positif maksimum yang dapat ditahan lamina adalah $\tau_{xy} = 160 \text{ MPa}$. Perhatikan bahwa tegangan geser negatif tidak mungkin bernilai $\tau_{xy} = -160 \text{ MPa}$ atau $\tau_{xy} = -862,07 \text{ MPa}$ karena sebelum tegangan tersebut tercapai, lamina sudah mengalami kegagalan akibat tegangan tarik σ_2 sudah mencapai nilai maksimum, yaitu ketika tegangan geser τ_{xy} yang bekerja bernilai $\tau_{xy} = -57,47 \text{ MPa}$. Selain itu, tegangan geser positif $\tau_{xy} = 183,91 \text{ MPa}$ dan $\tau_{xy} = 2.068,97 \text{ MPa}$ juga tidak mungkin terjadi karena sebelum tegangan geser tersebut tercapai, lamina sudah mengalami kegagalan akibat tegangan τ_{12} sudah mencapai nilai maksimum, yaitu ketika tegangan geser τ_{xy} yang bekerja bernilai $\tau_{xy} = 160 \text{ MPa}$.

Selain itu, dapat dilihat bahwa besar tegangan geser maksimum yang bekerja bergantung pada tanda negatif atau positif dari tegangan tersebut. Berdasarkan persamaan (a), jika tegangan geser bernilai negatif, lamina mengalami tegangan tarik pada arah transversal. Sementara itu, jika tegangan geser bernilai positif, lamina mengalami tegangan tekan pada arah transversal. Karena kuat tekan dan kuat tarik pada arah transversal berbeda, hal tersebut menyebabkan besar tegangan geser negatif maksimum dan besar tegangan geser positif maksimum berbeda. Besar tegangan geser terkecil dari kedua besar tegangan geser tersebut didefinisikan sebagai *kekuatan geser*.

Contoh 7.3

Misalkan kekuatan lamina diberikan oleh $\sigma_1^{\text{tek}} = -800 \text{ MPa}$, $\sigma_1^{\text{tar}} = 1.900 \text{ MPa}$, $\sigma_2^{\text{tek}} = -150 \text{ MPa}$, $\sigma_2^{\text{tar}} = 60 \text{ MPa}$, dan $\tau_{12}^{\text{maks}} = 85 \text{ MPa}$. Buatlah grafik kekuatan tarik vs arah serat pada rentang $0 < \theta < 90^\circ$ dari

lamina tersebut ketika lamina tersebut ditarik pada arah x seperti ditunjukkan pada gambar di bawah.



Jawab

Pertama, mari kita transformasikan terlebih dahulu tegangan yang bekerja ke sistem koordinat utama. Karena satu-satunya tegangan yang bekerja adalah σ_x , dapat dapat dituliskan bahwa

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$\sigma_1 = m^2 \sigma_x,$$

$$\sigma_2 = n^2 \sigma_x,$$

$$\tau_{12} = -mn \sigma_x.$$

Berdasarkan ketiga persamaan di atas, karena m dan n bernilai positif pada rentang $0 < \theta < 90^\circ$, ketika lamina ditarik oleh tegangan σ_x , σ_2 akan makin positif atau lamina mengalami tarikan pada arah 2. Sementara itu, tegangan geser τ_{12} menjadi makin negatif. Kemudian, karena $m = \cos \theta$ dan $n = \sin \theta$, dapat dituliskan bahwa

$$\sigma_x = \frac{\sigma_1}{\cos^2 \theta};$$

$$\sigma_x = \frac{\sigma_2}{\sin^2 \theta};$$

$$\sigma_x = -\frac{\tau_{12}}{\cos \theta \sin \theta}.$$

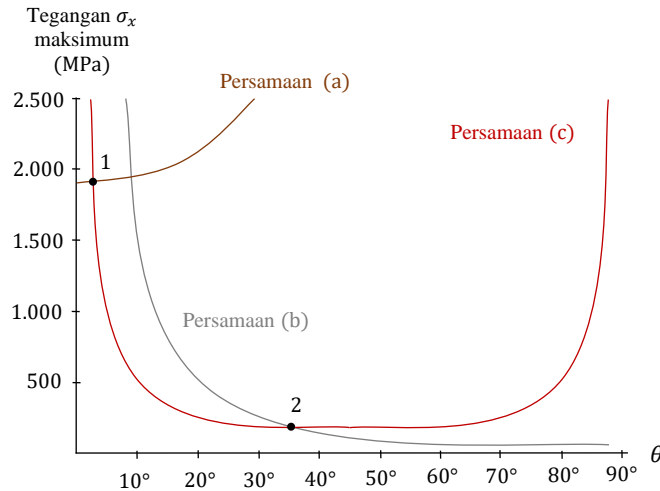
Dengan demikian, kekuatan tarik lamina dapat ditentukan dengan menyubstitusikan $\sigma_1^{\text{tar}} = 1.900 \text{ MPa}$, $\sigma_2^{\text{tar}} = 60 \text{ Mpa}$, dan $\tau_{12}^{\text{maks}} = -85 \text{ MPa}$ ke dalam tiga persamaan di atas, yaitu

$$\sigma_x = \frac{1.900 \text{ MPa}}{\cos^2 \theta}; \quad (\text{a})$$

$$\sigma_x = \frac{60 \text{ MPa}}{\sin^2 \theta}; \quad (\text{b})$$

$$\sigma_x = -\frac{-85 \text{ MPa}}{\cos \theta \sin \theta}. \quad (\text{c})$$

Plot persamaan (a)–(c) sebagai fungsi θ akan menghasilkan kurva seperti ditunjukkan pada gambar berikut. Kekuatan lamina sebagai fungsi θ ditunjukkan oleh kurva yang memberikan σ_x terkecil di setiap nilai θ .



Sekarang, mari kita tentukan nilai θ yang menunjukkan titik 1, yaitu titik perpotongan antara kurva yang dihasilkan oleh persamaan (a) dan (c). Dengan menyamakan persamaan (a) dan (c),

$$\frac{1.900 \text{ MPa}}{\cos^2 \theta} = \frac{85 \text{ MPa}}{\cos \theta \sin \theta};$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{85 \text{ MPa}}{1.900 \text{ MPa}};$$

$$\tan \theta = 0,0447.$$

Dengan demikian, titik 1 berada pada titik $\theta = \tan^{-1}(0,0447) = 2,56^\circ$.

Kemudian, nilai θ yang menunjukkan titik 2, yaitu titik perpotongan antara kurva yang dihasilkan oleh persamaan (b) dan (c), dapat ditentukan dengan menyamakan persamaan (b) dan (c), yaitu

$$\frac{60 \text{ MPa}}{\sin^2 \theta} = \frac{85 \text{ MPa}}{\cos \theta \sin \theta};$$

$$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{85 \text{ MPa}}{60 \text{ MPa}};$$

$$\cot \theta = 1,4167.$$

Dengan demikian, titik 2 berada pada titik $\theta = \cot^{-1}(1,4167) = 35,22^\circ$.

Terlihat bahwa ketika arah serat adalah pada rentang 0° – $2,56^\circ$, kekuatan lamina ditentukan oleh kekuatan tarik lamina pada arah serat. Setelah itu, pada rentang $2,56^\circ$ – $35,22^\circ$, kekuatan lamina ditentukan oleh kekuatan geser lamina dan pada rentang $35,22^\circ$ – 90° , kekuatan lamina ditentukan oleh kekuatan tarik lamina pada arah 2.

B. Rasio Kekuatan

Kriteria (7.1), (7.2), dan (7.3) memungkinkan kita untuk mendefinisikan besaran-besaran baru yang disebut sebagai *rasio kekuatan*. Rasio kekuatan tegangan tarik pada arah 1, arah 2, rasio kekuatan tegangan tekan pada arah 1, arah 2, dan rasio kekuatan tegangan geser secara berturut-turut didefinisikan sebagai R_1^{tar} , R_2^{tar} , R_1^{tek} , R_2^{tek} dan R_{12} seperti yang diberikan oleh persamaan (7.4)–(7.6).

$$R_1^{\text{tar}} = \frac{\sigma_1^{\text{tek}}}{\sigma_1}; \quad (7.4)$$

$$R_2^{\text{tar}} = \frac{\sigma_2^{\text{tek}}}{\sigma_2}; \quad (7.5)$$

$$R_1^{\text{tek}} = \frac{\sigma_1^{\text{tek}}}{\sigma_1}; \quad (7.6)$$

$$R_2^{\text{tek}} = \frac{\sigma_2^{\text{tek}}}{\sigma_2}; \quad (7.7)$$

$$R_{12} = \frac{\tau_{12}^{\text{maks}}}{|\tau_{12}|}. \quad (7.8)$$

Berdasarkan persamaan (7.4)–(7.8), terlihat bahwa ketika rasio kekuatan lamina masih lebih besar dari 1, lamina tersebut belum akan mengalami kegagalan. Namun, ketika rasio kekuatan sudah lebih kecil dari 1, itu berarti bahwa lamina sudah mengalami kegagalan.

Contoh 7.4

Tentukan rasio kekuatan R_1^{tar} , R_2^{tar} , dan R_{12} dari lamina pada Contoh 7.1.

Jawab

Pada Contoh 7.1, kita sudah menentukan tegangan σ_1 yang bekerja, yaitu $\sigma_2 = 142,50$ MPa. Dengan demikian, rasio kekuatan R_1^{tar} dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (7.4), yaitu

$$\begin{aligned} R_1^{\text{tar}} &= \frac{\sigma_1^{\text{tek}}}{\sigma_1} = \frac{1.800 \text{ MPa}}{142,50 \text{ MPa}} \\ &= 12,63. \end{aligned}$$

Karena rasio kekuatan R_1^{tar} masih lebih besar dari 1, ini berarti bahwa lamina belum mengalami kegagalan akibat tegangan pada arah 1 yang melebihi nilai maksimum.

Kemudian, pada Contoh 7.1, kita juga sudah menentukan tegangan σ_2 yang bekerja, yaitu $\sigma_2 = 47,50$ MPa. Dengan demikian, rasio kekuatan R_2^{tar} dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (7.5), yaitu

$$\begin{aligned} R_2^{\text{tar}} &= \frac{\sigma_2^{\text{tek}}}{\sigma_2} = \frac{50 \text{ MPa}}{47,50 \text{ MPa}} \\ &= 1,05. \end{aligned}$$

Terlihat bahwa rasio kekuatan R_2^{tar} masih lebih besar dari 1 dan ini berarti bahwa lamina belum mengalami kegagalan akibat tegangan pada arah 2 yang melebihi nilai maksimum.

Selanjutnya, pada Contoh 7.1, kita juga sudah menentukan tegangan τ_{12} yang bekerja, yaitu $\tau_{12} = -82,27$ MPa sehingga rasio kekuatan R_{12} dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (7.8), yaitu

$$R_{12} = \frac{\tau_{12}^{\text{maks}}}{|\tau_{12}|} = \frac{80 \text{ MPa}}{82,27 \text{ MPa}}$$

$$= 0,97.$$

Karena rasio kekuatan R_{12} lebih kecil dari 1, ini berarti bahwa lamina mengalami kegagalan akibat tegangan geser τ_{12} yang melebihi nilai maksimum.

C. Diagram Batas Kekuatan Lamina

Misalkan sebuah lamina menerima tegangan σ_x , σ_y , dan τ_{xy} secara bersamaan. Nilai maksimum dari ketiga tegangan tersebut terkait satu sama lain. Untuk menggambarkan keterkaitan antara ketiga tegangan maksimum tersebut, kita bisa membuat sebuah diagram yang disebut sebagai *diagram batas kekuatan lamina*. Akan tetapi, untuk penyederhanaan pembahasan, pada bagian ini, kita akan mengasumsikan tegangan τ_{xy} bernilai konstan sehingga diagram batas kekuatan lamina menjadi diagram σ_x vs. σ_y yang menunjukkan batas-batas maksimum tegangan σ_x dan σ_y ketika tegangan geser τ_{xy} adalah tertentu. Untuk lebih jelasnya, mari kita bahas Contoh 7.4.

Contoh 7.5

Buatlah diagram batas kekuatan lamina yang memiliki arah serat $\theta = 60^\circ$ ketika lamina tersebut menerima tegangan geser $\tau_{xy} = 24$ MPa. Diketahui bahwa kekuatan lamina tersebut diberikan oleh $\sigma_1^{\text{tek}} = -850$ MPa, $\sigma_1^{\text{tar}} = 1.750$ MPa, $\sigma_2^{\text{tek}} = -145$ MPa, $\sigma_2^{\text{tar}} = 60$ MPa dan $\tau_{12}^{\text{maks}} = 90$ MPa.

Jawab

Berdasarkan data kekuatan lamina, tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} yang bekerja harus di dalam rentang batas kekuatan lamina tersebut, yaitu

$$\begin{bmatrix} -850 \text{ MPa} \\ -145 \text{ MPa} \\ -90 \text{ MPa} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 1.750 \text{ MPa} \\ 60 \text{ MPa} \\ 90 \text{ MPa} \end{bmatrix}. \quad (\text{a})$$

Sekarang, mari kita tentukan tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} yang bekerja. Kita bisa menuliskan bahwa tegangan yang bekerja pada lamina adalah σ_x , σ_y , dan $\tau_{xy} = 24 \text{ MPa}$. Kemudian, dengan $m = \cos(60^\circ)$ dan $n = \sin(60^\circ)$, tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} yang dialami lamina tersebut adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ 24 \text{ MPa} \end{bmatrix}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 \sigma_x + 0,75 \sigma_y + 20,78 \text{ MPa} \\ 0,75 \sigma_x + 0,25 \sigma_y - 20,78 \text{ MPa} \\ -0,43 \sigma_x + 0,43 \sigma_y - 12 \text{ MPa} \end{bmatrix}. \quad (\text{b})$$

Berdasarkan pertidaksamaan (a) dan persamaan (b), supaya lamina tidak mengalami kegagalan akibat tegangan tekan pada arah 1, kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang bekerja tidak boleh melanggar pertidaksamaan berikut.

$$\sigma_1 > \sigma_1^{\text{tek}},$$

$$0,25 \sigma_x + 0,75 \sigma_y + 20,78 \text{ MPa} > -850 \text{ MPa},$$

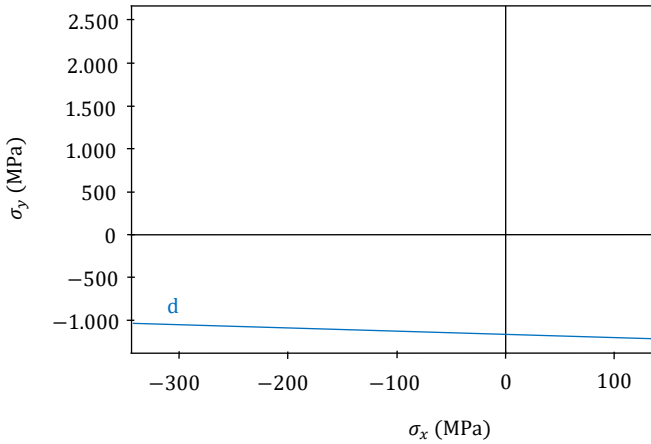
$$0,25 \sigma_x + 0,75 \sigma_y > -870,78 \text{ MPa}. \quad (\text{c})$$

Jika kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang bekerja melanggar pertidaksamaan (c), lamina akan mengalami kegagalan akibat tegangan tekan pada arah 1. Kemudian, berdasarkan pertidaksamaan (c), batas kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang menentukan dapat atau tidaknya terjadi kegagalan akibat tegangan tekan pada arah 1 diberikan oleh

$$0,25 \sigma_x + 0,75 \sigma_y = -870,78 \text{ MPa}. \quad (\text{d})$$

Batas tersebut ditunjukkan oleh garis seperti ditunjukkan pada Gambar 1. Kemudian, berdasarkan pertidaksamaan (c), jika $\sigma_x = 0$, makin positif nilai σ_y , pertidaksamaan tersebut tidak akan pernah dilanggar. Namun, makin negatif nilai σ_y , pertidaksamaan tersebut akan dilanggar dan ini berarti bahwa

pada keadaan tersebut lamina mengalami kegagalan akibat tegangan tekan pada arah 1. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa daerah di atas garis d pada Gambar 1 menunjukkan seluruh kemungkinan kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang tidak menyebabkan kegagalan akibat tegangan tekan pada arah 1. Sementara itu, daerah di bawah garis d pada gambar tersebut menunjukkan seluruh kemungkinan kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang dapat menyebabkan kegagalan akibat tegangan tekan pada arah 1.



Gambar 1

Kemudian, berdasarkan pertidaksamaan (a) dan persamaan (b), supaya lamina tidak mengalami kegagalan akibat tegangan tarik pada arah 1, kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang bekerja tidak boleh melanggar pertidaksamaan berikut.

$$\sigma_1 < \sigma_1^{\text{tar}},$$

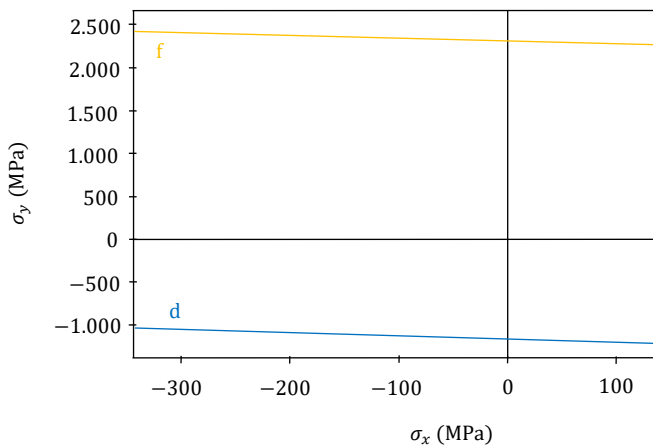
$$0,25 \sigma_x + 0,75 \sigma_y + 20,78 \text{ MPa} < 1.750 \text{ MPa},$$

$$0,25 \sigma_x + 0,75 \sigma_y < 1.729,22 \text{ MPa.} \tag{e}$$

Jika kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang bekerja melanggar pertidaksamaan (e), lamina akan mengalami kegagalan akibat tegangan tarik pada arah 1. Selain itu, berdasarkan pertidaksamaan (e), batas kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang menentukan dapat atau tidaknya terjadi kegagalan akibat tegangan tarik pada arah 1 diberikan oleh

$$0,25 \sigma_x + 0,75 \sigma_y = 1.729,22 \text{ MPa.} \tag{f}$$

Batas tersebut ditunjukkan oleh garis f seperti ditunjukkan pada Gambar 2. Berdasarkan pertidaksamaan (e), jika $\sigma_x = 0$, makin negatif nilai σ_y , pertidaksamaan tersebut tidak akan pernah dilanggar. Namun, makin positif nilai σ_y , pertidaksamaan tersebut akan dilanggar dan ini berarti bahwa pada keadaan tersebut lamina mengalami kegagalan akibat tegangan tekan pada arah 1. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa daerah di atas garis f pada Gambar 2 menunjukkan seluruh kemungkinan kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang dapat menyebabkan kegagalan akibat tegangan tarik pada arah 1. Sementara itu, daerah di bawah garis f pada gambar tersebut menunjukkan seluruh kemungkinan kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang tidak dapat menyebabkan kegagalan akibat tegangan tarik pada arah 1.



Gambar 2

Meskipun semua kombinasi tegangan σ_x dan σ_y di atas garis d tidak dapat menyebabkan terjadinya kegagalan akibat tegangan tekan pada arah 1, semua kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang berada di atas garis f dapat menyebabkan terjadinya kegagalan akibat tegangan tarik pada arah 1. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa untuk menghindari kegagalan akibat tegangan pada arah 1, baik tegangan tekan maupun tegangan tarik, kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang bekerja harus berada di antara garis d dan f.

Selanjutnya, mari kita analisis kemungkinan kegagalan akibat tegangan pada arah 2. Berdasarkan pertidaksamaan (a) dan persamaan (b), supaya lamina tidak mengalami kegagalan akibat tegangan tekan pada arah 2, kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang bekerja tidak boleh melanggar pertidaksamaan berikut:

$$\sigma_2 > \sigma_2^{\text{tek}},$$

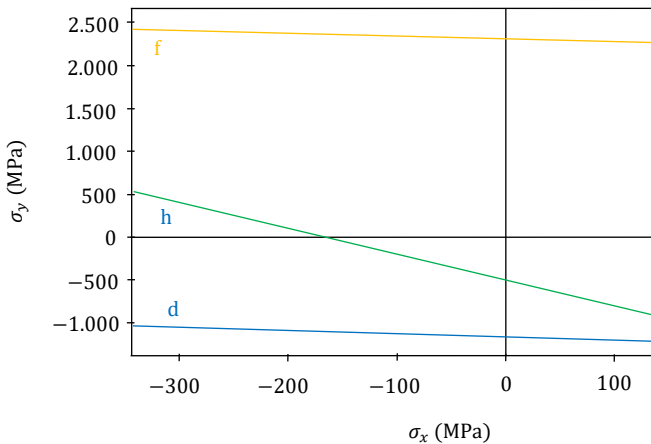
$$0,75 \sigma_x + 0,25 \sigma_y - 20,78 \text{ MPa} > -145 \text{ MPa},$$

$$0,75 \sigma_x + 0,25 \sigma_y > -124,22 \text{ MPa}. \quad (g)$$

Jika kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang bekerja melanggar pertidaksamaan (g), lamina akan mengalami kegagalan akibat tegangan tekan pada arah 2. Selain itu, berdasarkan pertidaksamaan (g), batas kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang menentukan dapat atau tidaknya terjadi kegagalan akibat tegangan tekan pada arah 2 diberikan oleh

$$0,75 \sigma_x + 0,25 \sigma_y = -124,22 \text{ MPa}. \quad (h)$$

Batas tersebut ditunjukkan oleh garis h seperti ditunjukkan pada Gambar 3. Berdasarkan pertidaksamaan g, jika $\sigma_x = 0$, makin positif nilai σ_y , pertidaksamaan tersebut tidak akan pernah dilanggar. Namun, makin negatif nilai σ_y , pertidaksamaan tersebut akan dilanggar dan ini berarti bahwa pada keadaan tersebut lamina mengalami kegagalan akibat tegangan tekan pada arah 2. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa daerah di atas garis h pada Gambar 2 menunjukkan seluruh kemungkinan kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang tidak dapat menyebabkan kegagalan akibat tegangan tekan pada arah 2. Sementara itu, daerah di bawah garis h pada gambar tersebut menunjukkan seluruh kemungkinan kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang dapat menyebabkan kegagalan akibat tegangan tekan pada arah 2.



Gambar 3

Kita sudah membahas bahwa kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang berada di antara garis d dan f tidak menyebabkan kegagalan akibat tegangan pada arah 1. Namun, kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang berada di bawah

garis h dapat menyebabkan kegagalan akibat tegangan tekan pada arah 2. Oleh karena itu, supaya lamina tidak mengalami kegagalan akibat tegangan pada arah 1 dan tegangan tekan pada arah 2, kombinasi tegangan σ_x dan σ_y harus berada di antara garis f dan h.

Kemudian, berdasarkan pertidaksamaan (a) dan persamaan (b), supaya lamina tidak mengalami kegagalan akibat tegangan tarik pada arah 2, kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang bekerja tidak boleh melanggar pertidaksamaan berikut.

$$\sigma_2 < \sigma_2^{\text{tar}},$$

$$0,75 \sigma_x + 0,25 \sigma_y - 20,78 \text{ MPa} < 60 \text{ MPa},$$

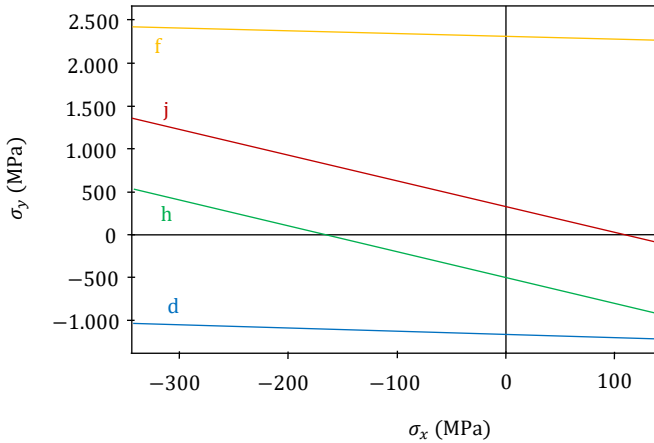
$$0,75 \sigma_x + 0,25 \sigma_y < 80,78 \text{ MPa.} \quad (\text{i})$$

Jika kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang bekerja melanggar pertidaksamaan (i), lamina akan mengalami kegagalan akibat tegangan tarik pada arah 2. Kemudian, berdasarkan pertidaksamaan (i), batas kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang menentukan dapat atau tidaknya terjadi kegagalan akibat tegangan tarik pada arah 2 diberikan oleh

$$0,75 \sigma_x + 0,25 \sigma_y = -124,22 \text{ MPa.} \quad (\text{j})$$

Batas tersebut ditunjukkan oleh garis j seperti ditunjukkan pada Gambar 4. Berdasarkan pertidaksamaan i, jika $\sigma_x = 0$, makin negatif nilai σ_y , pertidaksamaan tersebut tidak akan pernah dilanggar. Akan tetapi, makin positif nilai σ_y , pertidaksamaan tersebut akan dilanggar dan ini berarti bahwa pada keadaan tersebut lamina mengalami kegagalan akibat tegangan tarik pada arah 2.

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa daerah di atas garis j pada Gambar 4 menunjukkan seluruh kemungkinan kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang dapat menyebabkan kegagalan akibat tegangan tarik pada arah 2. Sementara itu, daerah di bawah garis j pada gambar tersebut menunjukkan seluruh kemungkinan kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang tidak dapat menyebabkan kegagalan akibat tegangan tarik pada arah 2. Ini berarti bahwa supaya lamina tidak mengalami kegagalan akibat tegangan pada arah 1 dan 2, baik tegangan tekan maupun tegangan tarik, kombinasi tegangan σ_x dan σ_y harus berada di antara garis h dan j.



Gambar 4

Selanjutnya, mari kita analisis kemungkinan kegagalan akibat tegangan geser τ_{12} . Berdasarkan pertidaksamaan (a) dan persamaan (b), supaya lamina tidak mengalami kegagalan akibat tegangan geser τ_{12} yang bernilai negatif, kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang bekerja tidak boleh melanggar pertidaksamaan berikut.

$$\tau_{12} > -\left|\tau_{12}^{\text{maks}}\right|,$$

$$-0,43 \sigma_x + 0,43 \sigma_y - 12 \text{ MPa} > -90 \text{ MPa},$$

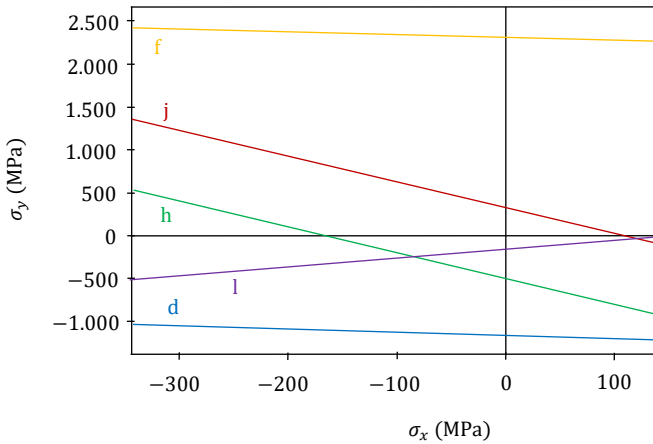
$$-0,43 \sigma_x + 0,43 \sigma_y > -78 \text{ MPa}. \quad (\text{k})$$

Jika kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang bekerja melanggar pertidaksamaan (k), lamina akan mengalami kegagalan akibat tegangan geser τ_{12} yang bernilai negatif. Selain itu, berdasarkan pertidaksamaan (k), batas kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang menentukan dapat atau tidaknya terjadi kegagalan akibat tegangan geser τ_{12} yang bernilai negatif diberikan oleh

$$-0,43 \sigma_x + 0,43 \sigma_y = -78 \text{ MPa}. \quad (\text{l})$$

Batas tersebut ditunjukkan oleh garis l seperti ditunjukkan pada Gambar 5. Berdasarkan pertidaksamaan (k), jika $\sigma_x = 0$, makin positif nilai σ_y , pertidaksamaan tersebut tidak akan pernah dilanggar. Akan tetapi, makin negatif nilai σ_y , pertidaksamaan tersebut akan dilanggar dan ini berarti bahwa pada keadaan tersebut lamina mengalami kegagalan akibat tegangan geser τ_{12} yang bernilai negatif. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa daerah di atas garis l pada Gambar 5 menunjukkan seluruh kemungkinan kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang tidak menyebabkan kegagalan akibat tegangan geser

τ_{12} yang bernilai negatif. Sementara itu, daerah di bawah garis l pada gambar tersebut menunjukkan seluruh kemungkinan kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang dapat menyebabkan kegagalan akibat tegangan geser τ_{12} yang bernilai negatif. Dengan demikian, ini berarti bahwa supaya lamina tidak mengalami kegagalan akibat tegangan pada arah 1 dan 2, baik tegangan tekan maupun tegangan tarik, dan juga akibat tegangan geser τ_{12} yang bernilai negatif, kombinasi tegangan σ_x dan σ_y harus berada bawah garis j, tetapi di atas garis h dan l.



Gambar 5

Kemudian, berdasarkan pertidaksamaan (a) dan persamaan (b), supaya lamina tidak mengalami kegagalan akibat tegangan geser τ_{12} yang bernilai positif, kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang bekerja tidak boleh melanggar pertidaksamaan berikut.

$$\tau_{12} < \tau_{12}^{\text{maks}},$$

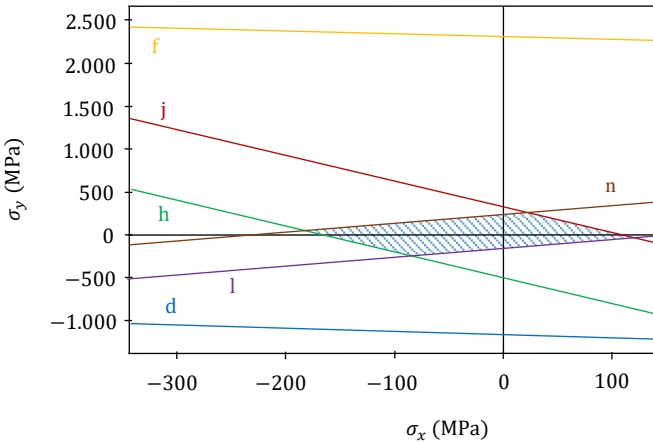
$$-0,43 \sigma_x + 0,43 \sigma_y - 12 \text{ MPa} < 90 \text{ MPa},$$

$$-0,43 \sigma_x + 0,43 \sigma_y < 102 \text{ MPa}. \tag{m}$$

Jika kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang bekerja melanggar pertidaksamaan m, lamina akan mengalami kegagalan akibat tegangan geser τ_{12} yang bernilai positif. Kemudian, berdasarkan pertidaksamaan (m), batas kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang menentukan dapat atau tidaknya terjadi kegagalan akibat tegangan geser τ_{12} yang bernilai positif diberikan oleh

$$-0,43 \sigma_x + 0,43 \sigma_y = 102 \text{ MPa}. \tag{n}$$

Batas tersebut ditunjukkan oleh garis n seperti ditunjukkan pada Gambar 6. Berdasarkan pertidaksamaan m, jika $\sigma_x = 0$, makin negatif nilai σ_y , pertidaksamaan tersebut tidak akan pernah dilanggar. Namun, makin positif nilai σ_y , pertidaksamaan tersebut akan dilanggar dan ini berarti bahwa pada keadaan tersebut lamina mengalami kegagalan akibat tegangan geser τ_{12} yang bernilai positif.



Gambar 6

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa daerah di atas garis n pada Gambar 6 menunjukkan seluruh kemungkinan kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang dapat menyebabkan kegagalan akibat tegangan geser τ_{12} yang bernilai positif. Sementara itu, daerah di bawah garis n pada gambar tersebut menunjukkan seluruh kemungkinan kombinasi tegangan σ_x dan σ_y yang tidak dapat menyebabkan kegagalan akibat tegangan geser τ_{12} yang bernilai positif. Dengan demikian, supaya lamina tidak mengalami kegagalan akibat tegangan pada arah 1 dan 2, baik tegangan tekan maupun tegangan tarik, dan juga akibat tegangan geser τ_{12} , baik yang bernilai positif maupun negatif, kombinasi tegangan σ_x dan σ_y harus berada di dalam daerah yang diarsir seperti ditunjukkan pada Gambar 6. Gambar 6 ini disebut juga sebagai *diagram batas kekuatan lamina*.

D. Kekuatan Laminat dan Kegagalan Lapisan Pertama

Karena laminat terdiri dari beberapa lapis lamina, kekuatan laminat atau tegangan maksimum yang mampu ditahan laminat tersebut sebelum mengalami kegagalan sangat bergantung pada lamina-lamina penyusunnya. Namun, karena adanya perbedaan arah serat dari lamina penyusunnya, ketika laminat menerima

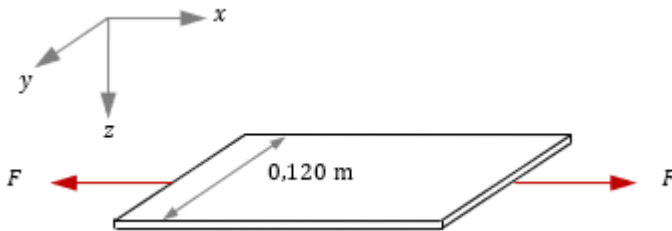
tegangan tarik pada arah x misalnya, kegagalan laminat terjadi secara bertahap. Artinya, lamina dengan arah serat tertentu akan mengalami kegagalan terlebih dahulu. Akibatnya, lamina yang mengalami kegagalan tersebut tidak lagi berperan dalam menahan tegangan tarik yang dialami oleh laminat sehingga tegangan yang bekerja pada laminat bertambah besar, begitu juga dengan regangannya. Jika lamina-lamina penyusun yang tersisa masih mampu menerima tegangan tersebut, laminat masih bisa menerima tegangan tambahan. Jika tegangan terus ditambah dan pada akhirnya lamina terakhir mengalami kegagalan, keadaan tersebut disebut sebagai kegagalan lapisan terakhir.

Karena laminat masih mampu menerima tegangan tambahan ketika lapisan pertama dari laminat tersebut mengalami kegagalan, definisi kegagalan pada laminat menjadi berbeda-beda. Definisi tersebut bergantung pada filosofi yang digunakan. Setidaknya, terdapat dua definisi tentang kegagalan laminat, yaitu *kegagalan lapisan pertama* dan *kegagalan lapisan terakhir*. Kegagalan lapisan pertama mengatakan bahwa laminat didefinisikan mengalami kegagalan ketika salah satu lapisan mengalami kegagalan. Konsep ini merupakan konsep yang konservatif dalam merancang suatu struktur komposit. Kegagalan lapisan terakhir mengatakan bahwa laminat didefinisikan mengalami kegagalan ketika lapisan terakhir mengalami kegagalan.

Pada buku ini, kita akan menggunakan definisi kegagalan lapisan pertama untuk memprediksi kekuatan suatu laminat. Kegagalan laminat dapat diprediksi dengan meninjau tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} yang bekerja pada setiap lamina penyusun ketika suatu laminat menerima tegangan. Untuk lebih jelasnya, mari kita bahas contoh berikut.

Contoh 7.6

Sebuah laminat dibuat dari lamina sejenis dengan susunan $(90/0/90)_s$. Sifat-sifat lamina penyusunnya adalah $E_1 = 150$ GPa, $E_2 = 14$ GPa, $\nu_{12} = 0,25$, dan $G_{12} = 8$ GPa. Satu-satunya gaya yang bekerja pada laminat adalah gaya pada arah x yang bisa berupa gaya tarik ataupun gaya tekan.



Berdasarkan konsep kegagalan lapisan pertama, tentukan besar gaya maksimum yang bisa ditahan oleh laminat tersebut. Diketahui bahwa ketebalan setiap lapisan lamina adalah 0,20 mm dan kekuatan lamina diberikan oleh $\sigma_1^{\text{tek}} = -800 \text{ MPa}$, $\sigma_1^{\text{tar}} = 1.600 \text{ MPa}$, $\sigma_2^{\text{tek}} = -140 \text{ MPa}$, $\sigma_2^{\text{tar}} = 60 \text{ MPa}$, dan $\tau_{12}^{\text{maks}} = 85 \text{ MPa}$.

Jawab

Untuk menentukan besar gaya F maksimum yang mampu ditahan oleh laminat, kita harus menentukan tegangan yang dihasilkan oleh gaya F di sepanjang ketebalan laminat. Proses penentuan tegangan di sepanjang ketebalan laminat adalah seperti yang kita lakukan pada Bab VI.

Berdasarkan data-data yang diberikan soal, matriks kekakuan tereduksi dari lamina adalah Q , yaitu

$$Q = \begin{bmatrix} 150,88 & 3,52 & 0 \\ 3,52 & 14,08 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \times 10^9 \text{ Pa.} \tag{a}$$

Dengan demikian, matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi dari lamina dengan serat arah 0° dan 90° adalah $\bar{Q}(0^\circ)$ dan $\bar{Q}(90^\circ)$, yaitu

$$\bar{Q}(0^\circ) = \begin{bmatrix} 150,88 & 3,52 & 0 \\ 3,52 & 14,08 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \times 10^9 \text{ Pa,} \tag{b}$$

$$\bar{Q}(90^\circ) = \begin{bmatrix} 14,08 & 3,52 & 0 \\ 3,52 & 150,88 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \times 10^9 \text{ Pa.} \tag{c}$$

Kemudian, karena susunan laminat adalah simetri, matriks A^* dari laminat tersebut sama dengan matriks A^{-1} nya. Untuk menentukan matriks A^* tersebut, mari kita tentukan terlebih dahulu matriks A . Berdasarkan persamaan (6.14), matriks A dari laminat adalah

$$A = \begin{bmatrix} 71,62 & 4,22 & 0 \\ 4,22 & 126,34 & 0 \\ 0 & 0 & 2,77 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{ Pa} \cdot \text{m} \tag{d}$$

sehingga

$$A^* = A^{-1} = \begin{bmatrix} 1,40 & -0,05 & 0 \\ -0,05 & 0,79 & 0 \\ 0 & 0 & 10,41 \end{bmatrix} \times 10^{-8} \text{ Pa}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}. \quad (\text{e})$$

Kemudian, karena lebar laminat adalah 0,120 m, N_x dapat dirumuskan sebagai

$$N_x = \frac{F}{0,120 \text{ m}}.$$

Kita mengetahui bahwa laminat memiliki susunan yang simetris dan satu-satunya gaya yang bekerja adalah gaya pada arah x dan ini berarti bahwa $\kappa_x^0 = \kappa_y^0 = \kappa_{xy}^0 = 0$ sehingga berdasarkan persamaan (6.63), dapat dituliskan bahwa

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1,40 & -0,05 & 0 \\ -0,05 & 0,79 & 0 \\ 0 & 0 & 10,41 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (F/0,120 \text{ m}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{-8} \text{ Pa}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} (1,17 \times 10^{-7}) F \\ (-3,90 \times 10^{-9}) F \\ 0 F \end{bmatrix} \text{N}^{-1}. \end{aligned}$$

Dengan demikian, karena laminat tidak mengalami kelengkungan, regangan di sepanjang ketebalan laminat bernilai sama sehingga bisa dituliskan bahwa

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1,17 \times 10^{-7}) F \\ (-3,90 \times 10^{-9}) F \\ 0 F \end{bmatrix} \text{N}^{-1}. \quad (\text{f})$$

Berdasarkan persamaan (f) dan matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi dari setiap lamina yang sudah kita tentukan, kita bisa menentukan tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} yang bekerja pada setiap lamina. Pertama, mari kita tentukan dahulu tegangan-tegangan yang bekerja pada lamina dengan serat arah 0° . Berdasarkan persamaan (b), (f) dan (4.54), tegangan σ_x , σ_y , dan τ_{xy} yang bekerja pada laminat dengan serat arah 0° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150,88 & 3,52 & 0 \\ 3,52 & 14,08 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1,17 \times 10^{-7}) F \\ (-3,90 \times 10^{-9}) F \\ 0 F \end{bmatrix} \times 10^9 \text{ m}^{-2}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.577,15 F \\ 355,55 F \\ 0 F \end{bmatrix} \text{ m}^{-2}. \quad (\text{g})$$

Arah serat lamina adalah 0° maka tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} dari lamina dengan serat arah 0° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.577,15 F \\ 355,55 F \\ 0 F \end{bmatrix} \text{ m}^{-2}. \quad (\text{h})$$

Kemudian, berdasarkan persamaan (c), (f), dan (4.54), tegangan yang bekerja pada laminat dengan serat arah 90° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14,08 & 3,52 & 0 \\ 3,52 & 150,88 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1,17 \times 10^{-7}) F \\ (-3,90 \times 10^{-9}) F \\ 0 F \end{bmatrix} \times 10^9 \text{ m}^{-2}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.628,09 F \\ -177,78 F \\ 0 F \end{bmatrix} \text{ m}^{-2}. \quad (\text{i})$$

Dengan mentransformasikan tegangan-tegangan di atas, tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} dari lamina dengan serat arah 90° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -177,78 F \\ 1.628,09 F \\ 0 F \end{bmatrix} \text{ m}^{-2}. \quad (\text{j})$$

Sekarang, mari kita tentukan besar gaya F ketika lamina dengan serat arah 0° mengalami kegagalan. Berdasarkan data-data pada soal, lamina akan mengalami kegagalan jika tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} melanggar pertidaksamaan berikut.

$$\begin{bmatrix} -800 \text{ MPa} \\ -140 \text{ MPa} \\ -85 \text{ MPa} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 1.600 \text{ MPa} \\ 60 \text{ MPa} \\ 85 \text{ MPa} \end{bmatrix}. \quad (\text{k})$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (h) dan (k), lamina dengan serat arah 0° akan mengalami kegagalan akibat tegangan tekan pada arah 1, tegangan tekan pada arah 2 dan tegangan geser τ_{12} negatif jika gaya F yang bekerja secara berturut-turut diberikan oleh baris pertama, kedua, dan ketiga pada persamaan berikut.

$$\begin{bmatrix} 17.577,15 F \\ 355,55 F \\ 0 F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -800 \text{ MPa} \\ -140 \text{ MPa} \\ -85 \text{ MPa} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} F \\ F \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -45,51 \\ -393,75 \\ -\infty \end{bmatrix} \text{ kN}. \quad (\text{l})$$

Tanda minus menunjukkan bahwa gaya F yang bekerja merupakan gaya tekan. Berdasarkan persamaan (l), terlihat bahwa lamina dengan serat arah 0° akan mengalami kegagalan akibat tegangan tekan σ_1 jika gaya F merupakan gaya tekan sebesar 45,51 kN. Kemudian, kegagalan akibat tegangan tekan σ_2 akan terjadi jika gaya F merupakan gaya tekan sebesar 393,75 kN. Ketika laminat ditekan oleh gaya F dan setiap lamina pada laminat tersebut tidak terikat satu sama lain, akibat efek Poisson, lamina dengan serat arah 0° akan mengalami regangan positif pada arah 2. Akan tetapi, karena lamina dengan serat arah 0° terikat dengan lamina dengan serat arah 90° , regangan tersebut ditahan karena arah 2 dari lamina dengan serat arah 0° sama dengan arah 1 dari lamina dengan serat arah 90° . Dengan kata lain, ketika laminat menerima gaya tekan, lamina dengan serat arah 90° memberikan tegangan tekan pada arah 2 pada lamina dengan serat arah 0° . Kemudian, supaya kegagalan akibat tegangan geser τ_{12} negatif terjadi, besar gaya tekan yang harus bekerja adalah tak hingga. Ini berarti bahwa pada laminat ini, kegagalan akibat tegangan geser negatif tidak mungkin terjadi.

Kemudian, lamina dengan serat arah 0° akan mengalami kegagalan akibat tegangan tarik pada arah 1, tegangan tarik pada arah 2, dan tegangan geser τ_{12} positif jika gaya F yang bekerja adalah

$$\begin{bmatrix} 17.577,15 F \\ 355,55 F \\ 0 F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.600 \text{ MPa} \\ 60 \text{ MPa} \\ 85 \text{ MPa} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} F \\ F \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 91,03 \\ 168,75 \\ \infty \end{bmatrix} \text{ kN.} \tag{m}$$

Seperti halnya akibat dari gaya tekan pada laminat, regangan negatif yang akan dialami oleh lamina akibat gaya tarik F ditahan oleh lamina dengan serat arah 90° . Kemudian, kegagalan akibat tegangan geser positif τ_{12} juga tidak mungkin terjadi.

Selanjutnya, mari kita tentukan besar gaya F ketika lamina dengan serat arah 90° mengalami kegagalan. Berdasarkan persamaan (i) dan (k), lamina dengan serat arah 90° akan mengalami kegagalan akibat tegangan tekan pada arah 1, tegangan tekan pada arah 2, dan tegangan geser negatif jika gaya F yang bekerja adalah

$$\begin{bmatrix} -177,78 F \\ 1.628,09 F \\ 0 F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -800 \text{ MPa} \\ -140 \text{ MPa} \\ -85 \text{ MPa} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} F \\ F \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.499,94 \\ -85,99 \\ -\infty \end{bmatrix} \text{ kN.} \tag{n}$$

Kemudian, lamina dengan serat arah 90° akan mengalami kegagalan akibat tegangan tarik pada arah 1, tegangan tarik pada arah 2, dan tegangan geser positif jika gaya F yang bekerja adalah

$$\begin{bmatrix} -177,78 F \\ 1.628,09 F \\ 0 F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.600 \text{ MPa} \\ 60 \text{ MPa} \\ 85 \text{ MPa} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} F \\ F \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.999,89 \\ 36,85 \\ \infty \end{bmatrix} \text{ kN.} \quad (0)$$

Berdasarkan persamaan (1)–(o), dapat disimpulkan batas gaya F yang dapat bekerja pada laminat untuk menyebabkan terjadinya kegagalan akibat tegangan tarik pada arah 1 dan arah 2, tegangan tekan pada arah 1 dan 2, dan tegangan geser τ_{12} positif dan negatif ditunjukkan pada tabel di bawah.

Lamina	Penyebab kegagalan					
	σ_1^{tek}	σ_1^{tar}	σ_2^{tek}	σ_2^{tar}	$-\tau_{12}^{\text{maks}}$	$+\tau_{12}^{\text{maks}}$
0°	-45,51	91,03	-393,76	168,75	$-\infty$	∞
90°	4.499,94	-8.999,89	-85,99	36,85	$-\infty$	∞

Berdasarkan tabel tersebut, dapat dilihat bahwa jika gaya yang bekerja pada laminat merupakan gaya tarik, gaya maksimum yang dapat ditahan oleh laminat adalah 36,85 kN. Pada keadaan tersebut, lamina dengan serat arah 90° mengalami kegagalan akibat tegangan tarik pada arah 2. Ketika salah satu lamina mengalami kegagalan, berdasarkan konsep kegagalan lapisan pertama, laminat didefinisikan sudah mengalami kegagalan. Kemudian, perhatikan bahwa gaya tarik yang sebesar 91,03 kN, 168,75 kN, dan 4.499,94 kN tidak menunjukkan kekuatan laminat karena sebelum gaya tersebut tercapai, laminat sudah mengalami kegagalan ketika menerima gaya tarik sebesar 36,85.

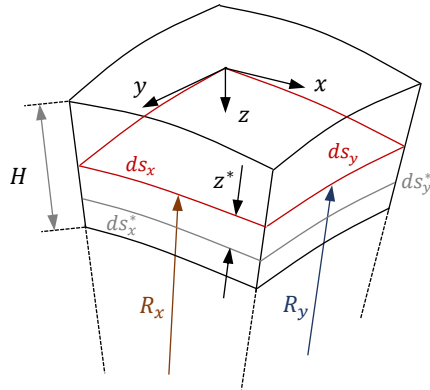
Kemudian, jika gaya yang bekerja pada laminat merupakan gaya tekan, laminat akan mengalami kegagalan ketika gaya tekan tersebut bernilai -45,51 kN. Kegagalan laminat ditandai dengan lamina dengan serat arah 0° yang mengalami kegagalan akibat tegangan tekan pada arah 1.

Dari pembahasan ini dapat dilihat bahwa untuk menentukan gaya maksimum yang mampu ditahan oleh laminat, kita perlu menentukan gaya-gaya yang dapat menyebabkan terjadinya kegagalan akibat tegangan tarik pada arah 1 dan arah 2, tegangan tekan pada arah 1 dan 2, tegangan geser τ_{12} positif dan negatif dari setiap lamina.

E. Resultan Tegangan dan Resultan Momen pada Elemen Cangkang

Sejauh ini kita membahas laminat yang berbentuk pelat datar. Akan tetapi, dalam pengaplikasiannya, banyak struktur komposit yang bidangnya memiliki bentuk yang melengkung seperti tangki, tabung roket, pipa, dan lain-lain. Jenis

struktur yang berupa pelat melengkung seperti demikian disebut sebagai *cangkang*. Pada subbab ini, kita akan membahas bahwa pada kasus tertentu, cangkang dapat diasumsikan sebagai pelat datar karena rumusan resultan tegangan dan resultan momen yang bekerja pada cangkang dapat didekati dengan rumusan resultan tegangan dan resultan momen pada pelat datar.



Gambar 7.3 Elemen cangkang.

Gambar 7.3 menunjukkan elemen cangkang yang memiliki ketebalan H dengan titik asal sistem koordinat berada di salah satu sudut bidang referensi dari elemen tersebut. Berdasarkan gambar tersebut, ds_x adalah panjang sisi bidang referensi laminat yang sejajar dengan sumbu x . Kemudian, ds_x^* adalah panjang sisi yang berada sejauh z^* di bawah sisi ds_x . Jika R_x adalah radius kelengkungan sisi ds_x , radius kelengkungan sisi ds_x^* adalah $(R_x - z^*)$. Dengan demikian, dapat dituliskan bahwa

$$\frac{ds_x}{R_x} = \frac{ds_x^*}{R_x - z^*} \tag{7.9}$$

sehingga

$$ds_x^* = (R_x - z^*) \frac{ds_x}{R_x}$$

maka

$$ds_x^* = \left(1 - \frac{z^*}{R_x}\right) ds_x. \tag{7.10}$$

Kemudian, ds_y adalah panjang sisi bidang referensi laminat yang sejajar dengan sumbu y dan ds_y^* adalah panjang sisi yang berada sejauh z^* di bawah

sisi ds_y . Dengan demikian, jika R_y adalah radius kelengkungan sisi ds_y , radius kelengkungan sisi ds_y^* adalah $(R_y - z^*)$ sehingga

$$\frac{ds_y}{R_y} = \frac{ds_y^*}{R_y - z^*};$$

$$ds_y^* = \left(1 - \frac{z^*}{R_y}\right) ds_y. \quad (7.11)$$

Selanjutnya, jika gaya normal total dan resultan tegangan yang bekerja pada arah x secara berturut-turut adalah F_x dan N_x , dapat dituliskan bahwa

$$F_x = N_x ds_y. \quad (7.12)$$

Selain itu, kita juga bisa menuliskan bahwa tegangan total yang bekerja di sepanjang sisi ds_y^* sebagai $(\sigma_x ds_y^*)$. Dengan demikian, gaya total pada arah x dapat ditulis sebagai

$$F_x = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_x ds_y^* dz. \quad (7.13)$$

Dengan menyamakan persamaan (7.12) dan (7.13), kita memperoleh

$$N_x ds_y = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_x ds_y^* dz. \quad (7.14)$$

Dengan demikian, dengan menyubstitusikan persamaan (7.11) ke persamaan (7.14), resultan tegangan N_x pada cangkang dapat ditulis sebagai

$$N_x ds_y = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_x \left(1 - \frac{z^*}{R_y}\right) ds_y dz,$$

$$N_x = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_x \left(1 - \frac{z^*}{R_y}\right) dz. \quad (7.15)$$

Dengan cara yang sama, berdasarkan persamaan (7.10), resultan tegangan pada arah y , yaitu N_y , menjadi

$$N_y = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_y \left(1 - \frac{z^*}{R_x}\right) dz. \quad (7.16)$$

Kemudian, karena rumusan resultan tegangan geser memiliki bentuk yang sama dengan rumusan resultan tegangan, dengan cara yang sama, resultan tegangan geser yang dihasilkan oleh tegangan geser τ_{xy} adalah N_{xy} , yaitu

$$N_{xy} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \tau_{xy} \left(1 - \frac{z^*}{R_y}\right) dz. \quad (7.17)$$

Sementara itu, resultan tegangan geser yang dihasilkan oleh tegangan geser τ_{yx} adalah N_{yx} yaitu

$$N_{yx} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \tau_{yx} \left(1 - \frac{z^*}{R_x}\right) dz. \quad (7.18)$$

Perhatikan bahwa pada cangkang, secara umum, N_{xy} dan N_{yx} tidak selalu sama karena R_x tidak selalu sama dengan R_y , meskipun $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

Selanjutnya, mari kita tentukan resultan momen yang bekerja pada cangkang. Jika momen total dan resultan momen yang dihasilkan oleh tegangan σ_x secara berturut-turut adalah M_x^{tot} dan M_x , dapat dituliskan bahwa

$$M_x^{tot} = M_x ds_y. \quad (7.19)$$

Kemudian, karena tegangan total yang bekerja di sepanjang sisi ds_y^* adalah $(\sigma_x ds_y^z)$, momen total M_x^{tot} dapat ditulis sebagai

$$M_x^{tot} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_x ds_y^* z dz. \quad (7.20)$$

Dengan menyamakan persamaan (7.19) dan (7.20), kita memperoleh

$$M_x ds_y = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_x ds_y^* z dz. \quad (7.21)$$

Dengan demikian, dengan menyubstitusikan persamaan (7.11) ke persamaan (7.21), resultan momen M_x pada cangkang dapat ditulis sebagai

$$M_x ds_y = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_x \left(1 - \frac{z^*}{R_y}\right) ds_y z dz,$$

$$M_x = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_x \left(1 - \frac{z^*}{R_y}\right) z dz. \quad (7.22)$$

Dengan cara yang sama, berdasarkan persamaan (7.10), resultan momen yang dihasilkan oleh tegangan σ_y , yaitu M_y , dapat ditulis sebagai

$$M_y = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_y \left(1 - \frac{z^*}{R_x}\right) z dz. \quad (7.23)$$

Selain itu, karena rumusan resultan momen memiliki bentuk yang sama dengan rumusan resultan momen pemuntir, resultan tegangan pemuntir yang dihasilkan oleh tegangan geser τ_{xy} adalah M_{xy} , yaitu

$$M_{xy} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \tau_{xy} \left(1 - \frac{z^*}{R_y}\right) z dz, \quad (7.24)$$

sedangkan resultan momen pemuntir yang dihasilkan oleh tegangan geser τ_{yx} adalah M_{yx} , yaitu

$$M_{yx} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \tau_{yx} \left(1 - \frac{z^*}{R_x}\right) z dz. \quad (7.25)$$

Sama halnya dengan resultan tegangan geser, pada cangkang, secara umum, M_{xy} dan M_{yx} tidak selalu sama karena R_x tidak selalu sama dengan R_y , meskipun $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

Sekarang, kita sudah merumuskan resultan tegangan dan resultan momen pada cangkang yang diberikan oleh persamaan (7.15)–(7.18) dan (7.23)–(7.25). Berdasarkan persamaan-persamaan tersebut, jika cangkang cukup tipis, yaitu ketebalan H jauh lebih kecil dibandingkan dengan radius kelengkungan R_x dan R_y , (z^*/R_x) atau (z^*/R_y) pada persamaan-persamaan tersebut dapat diasumsikan sama dengan nol. Dengan demikian, rumusan resultan tegangan dan resultan momen pada cangkang tipis sama dengan rumusan resultan tegangan dan resultan momen pada pelat datar, yaitu

$$N_x = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_x dz, \quad (7.26)$$

$$N_y = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_y dz, \quad (7.27)$$

$$N_{xy} = N_{yx} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \tau_{xy} dz, \quad (7.28)$$

$$M_x = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_x z dz, \quad (7.29)$$

$$M_y = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_y z dz, \quad (7.30)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \tau_{xy} z dz. \quad (7.31)$$

Kemudian, biasanya cangkang dikatakan sebagai cangkang tipis jika

$$\left(\frac{H}{R}\right)_{\text{maks}} \leq \frac{1}{20} = 0,05. \quad (7.32)$$

Contoh 7.7

Sebuah silinder dengan diameter 0,1 m dibuat dari laminat karbon/epoksi dengan susunan $(60/45/30)_s$ seperti ditunjukkan pada gambar di bawah. Diketahui bahwa ketebalan setiap lamina penyusun adalah 0,3 mm. sifat-sifat lamina penyusunnya adalah $E_1 = 140$ GPa, $E_2 = 10$ GPa, $G_{12} = 9$ GPa, dan $\nu_{12} = 0,25$.



Kekuatan lamina penyusun diberikan oleh $\sigma_1^{\text{tek}} = -820$ MPa, $\sigma_1^{\text{tar}} = 1.550$ MPa, $\sigma_2^{\text{tek}} = -130$ MPa, $\sigma_2^{\text{tar}} = 62$ MPa, dan $\tau_{12}^{\text{maks}} = 82$ MPa. Jika satu-satunya gaya yang bekerja pada tabung tersebut adalah gaya aksial (F_x), tentukan gaya maksimum yang bisa ditahan oleh pipa tersebut ketika pipa tersebut ditekan dan ditarik.

Jawab

Silinder terdiri dari enam lapis lamina dan masing-masing lamina memiliki ketebalan 0,3 mm maka ketebalan laminat adalah $6 \times 0,3 \text{ mm} = 1,8 \text{ mm}$. Kemudian, jari-jari silinder adalah $100 \text{ mm}/2 = 50 \text{ mm}$ maka

$$\frac{H}{R} = \frac{1,8 \text{ mm}}{50 \text{ mm}} = 0,036.$$

Dengan demikian, berdasarkan kriteria (7.32), tabung bisa diasumsikan sebagai pelat datar dan ini berarti bahwa contoh soal ini dapat kita selesaikan dengan menggunakan cara yang kita gunakan pada Contoh 7.5.

Pertama, mari kita tentukan terlebih dahulu resultan tegangan N_x yang bekerja. Karena h jauh lebih kecil dibanding R , kita dapat mengasumsikan diameter bagian dalam, tengah, dan luar dari silinder bernilai sama. Dengan demikian, resultan tegangan N_x dapat ditulis sebagai

$$N_x = \frac{F}{2\pi R} = \frac{F}{2\pi(0,05 \text{ m})}$$

maka

$$N_x = \frac{F}{0,314 \text{ m}}. \tag{a}$$

Setelah merumuskan resultan tegangan N_x , langkah berikutnya adalah seperti yang sudah kita lakukan pada Contoh 7.5. Pertama, kita perlu menentukan matriks kekakuan tereduksi dari lamina. Dengan demikian, setelah itu kita bisa menentukan matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi dari setiap lamina. Matriks-matriks tersebut adalah

$$\bar{Q}(30^\circ) = \begin{bmatrix} 8,74 & 2,31 & 4,01 \\ 2,31 & 2,21 & 1,64 \\ 4,01 & 1,64 & 2,96 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}, \tag{b}$$

Buku ini tidak diperjualbelikan.

$$\bar{Q}(45^\circ) = \begin{bmatrix} 4,79 & 2,99 & 3,26 \\ 2,99 & 4,79 & 3,26 \\ 3,26 & 3,26 & 3,64 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}, \quad (\text{c})$$

$$\bar{Q}(60^\circ) = \begin{bmatrix} 2,21 & 2,31 & 1,64 \\ 2,31 & 8,74 & 4,01 \\ 1,64 & 4,01 & 2,96 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}, \quad (\text{d})$$

Berdasarkan matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi dari setiap lamina pada persamaan (b), (c), dan (d), kita bisa menentukan matriks A laminat. Kemudian, karena susunan laminatnya simetri, $A^* = A^{-1}$ sehingga matriks A^* dapat langsung ditentukan dengan menginverskan matriks A , yaitu

$$A^* = A^{-1} = \begin{bmatrix} 2,27 & 0,22 & -2,32 \\ 0,22 & 2,27 & -2,32 \\ -2,32 & -2,32 & 6,08 \end{bmatrix} \times 10^{-8} \text{ Pa}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}. \quad (\text{e})$$

Dengan demikian, laminat memiliki susunan yang simetris dan satu-satunya gaya yang bekerja adalah gaya pada arah x maka $\kappa_x^0 = \kappa_y^0 = \kappa_{xy}^0 = 0$ dan berdasarkan persamaan (6.63), dapat dituliskan bahwa

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,27 & 0,22 & -2,32 \\ 0,22 & 2,27 & -2,32 \\ -2,32 & -2,32 & 6,08 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (F/0,314 \text{ m}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{-8} \text{ Pa}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} (7,22 \times 10^{-8}) F \\ (7,01 \times 10^{-9}) F \\ (-7,40 \times 10^{-8}) F \end{bmatrix} \text{N}^{-1}.$$

Selanjutnya, karena kelengkungan laminat sama dengan nol, regangan di sepanjang ketebalan laminat bernilai sama sehingga bisa dituliskan bahwa

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (7,22 \times 10^{-8}) F \\ (7,01 \times 10^{-9}) F \\ (-7,40 \times 10^{-8}) F \end{bmatrix} \text{N}^{-1}. \quad (\text{f})$$

Sekarang, mari kita tentukan tegangan σ_x , σ_y , dan τ_{xy} yang bekerja pada setiap lamina. Berdasarkan persamaan (b) dan (f), tegangan yang bekerja pada laminat dengan serat arah 30° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,74 & 2,31 & 4,01 \\ 2,31 & 2,21 & 1,64 \\ 4,01 & 1,64 & 2,96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (7,22 \times 10^{-8}) F \\ (7,01 \times 10^{-9}) F \\ (-7,40 \times 10^{-8}) F \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ m}^{-2}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.503,41 F \\ 607,93 F \\ 827,35 F \end{bmatrix} \text{ m}^{-2}. \quad (\text{g})$$

Kemudian, berdasarkan persamaan (c) dan (f), tegangan yang bekerja pada laminat dengan serat arah 45° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,79 & 2,99 & 3,26 \\ 2,99 & 4,79 & 3,26 \\ 3,26 & 3,26 & 3,64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (7,22 \times 10^{-8}) F \\ (7,01 \times 10^{-9}) F \\ (-7,40 \times 10^{-8}) F \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ m}^{-2}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.255,77 F \\ 82,22 F \\ -106,92 F \end{bmatrix} \text{ m}^{-2}. \quad (\text{h})$$

Sementara itu, berdasarkan persamaan (b) dan (f), tegangan yang bekerja pada laminat dengan serat arah 60° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,21 & 2,31 & 1,64 \\ 2,31 & 8,74 & 4,01 \\ 1,64 & 4,01 & 2,96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (7,22 \times 10^{-8}) F \\ (7,01 \times 10^{-9}) F \\ (-7,40 \times 10^{-8}) F \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ m}^{-2}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 546,68 F \\ -690,15 F \\ -720,43 F \end{bmatrix} \text{ m}^{-2}. \quad (\text{i})$$

Dengan mentransformasikan persamaan (g)–(i) ke sistem koordinat utama, tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} yang bekerja pada lamina dengan serat arah 30° , 45° , dan 60° secara berturut-turut diberikan oleh persamaan (j), (k), dan (m), yaitu

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.497,54 F \\ 615,80 F \\ -840,97 F \end{bmatrix} \text{ m}^{-2}, \quad (\text{j})$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 562,08 F \\ 775,91 F \\ -586,77 F \end{bmatrix} \text{ m}^{-2}, \quad (\text{k})$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.004,85 F \\ 861,38 F \\ -175,35 F \end{bmatrix} \text{ m}^{-2}. \quad (\text{l})$$

Selanjutnya, berdasarkan data-data pada soal, setiap lamina akan mengalami kegagalan jika tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} melanggar pertidaksamaan berikut.

$$\begin{bmatrix} -820 \text{ MPa} \\ -130 \text{ MPa} \\ -82 \text{ MPa} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 1.550 \text{ MPa} \\ 62 \text{ MPa} \\ 82 \text{ MPa} \end{bmatrix}. \quad (\text{m})$$

Dengan demikian, pada lamina dengan serat arah 30° , berdasarkan persamaan (j) dan pertidaksamaan (m), lamina tersebut akan mengalami kegagalan akibat tegangan tekan pada arah 1, tegangan tekan pada arah 2, dan tegangan geser τ_{12} negatif jika gaya F yang bekerja secara berturut-turut diberikan oleh baris pertama, kedua dan ketiga pada persamaan berikut.

$$\begin{bmatrix} 3.497,54 F \\ 615,80 F \\ -840,97 F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -820 \text{ MPa} \\ -130 \text{ MPa} \\ -82 \text{ MPa} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} F \\ F \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -234,45 \\ -211,11 \\ 97,51 \end{bmatrix} \text{ kN.} \quad (\text{n})$$

Kemudian, lamina dengan serat arah 30° akan mengalami kegagalan akibat tegangan tarik pada arah 1, tegangan tarik pada arah 2, dan tegangan geser τ_{12} positif jika gaya F yang bekerja secara berturut-turut diberikan oleh baris pertama, kedua dan ketiga pada persamaan berikut.

$$\begin{bmatrix} 3.497,54 F \\ 615,80 F \\ -840,97 F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.550 \text{ MPa} \\ 62 \text{ MPa} \\ 82 \text{ MPa} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} F \\ F \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 443,17 \\ 100,68 \\ -97,51 \end{bmatrix} \text{ kN.} \quad (\text{o})$$

Selanjutnya, berdasarkan persamaan (k) dan pertidaksamaan (m), lamina dengan serat arah 45° akan mengalami kegagalan akibat tegangan tekan pada arah 1, tegangan tekan pada arah 2, dan tegangan geser negatif jika gaya F yang bekerja secara berturut-turut diberikan oleh baris pertama, kedua, dan ketiga pada persamaan berikut.

$$\begin{bmatrix} 562,08 F \\ 775,91 F \\ -586,77 F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -800 \text{ MPa} \\ -140 \text{ MPa} \\ -82 \text{ MPa} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} F \\ F \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.423,28 \\ -180,43 \\ 139,75 \end{bmatrix} \text{ kN.} \quad (\text{p})$$

Sementara itu, lamina dengan serat arah 45° akan mengalami kegagalan akibat tegangan tarik pada arah 1, tegangan tarik pada arah 2, dan tegangan geser positif jika gaya F yang bekerja secara berturut-turut diberikan oleh baris pertama, kedua, dan ketiga pada persamaan berikut.

$$\begin{bmatrix} 562,08 F \\ 775,91 F \\ -586,77 F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.550 \text{ MPa} \\ 62 \text{ MPa} \\ 82 \text{ MPa} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} F \\ F \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.757,61 \\ 79,91 \\ -139,75 \end{bmatrix} \text{ kN.} \quad (\text{q})$$

Kemudian, berdasarkan persamaan (l) dan pertidaksamaan (m), lamina dengan serat arah 60° akan mengalami kegagalan akibat tegangan tekan pada arah 1, tegangan tekan pada arah 2, dan tegangan geser negatif jika gaya F yang bekerja secara berturut-turut diberikan oleh baris pertama, kedua, dan ketiga pada persamaan berikut.

$$\begin{bmatrix} -1.004,85 F \\ 861,38 F \\ -175,35 F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -800 \text{ MPa} \\ -140 \text{ MPa} \\ -82 \text{ MPa} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} F \\ F \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 796,14 \\ -162,53 \\ 467,64 \end{bmatrix} \text{ kN.} \quad (\text{r})$$

Lamina dengan serat arah 60° akan mengalami kegagalan akibat tegangan tarik pada arah 1, tegangan tarik pada arah 2, dan tegangan geser positif jika gaya F yang bekerja secara berturut-turut diberikan oleh baris pertama, kedua, dan ketiga pada persamaan berikut.

$$\begin{bmatrix} -1.004,85 F \\ 861,38 F \\ -175,35 F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.550 \text{ MPa} \\ 62 \text{ MPa} \\ 82 \text{ MPa} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} F \\ F \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.542,52 \\ 71,98 \\ -467,64 \end{bmatrix} \text{ kN.} \quad (\text{s})$$

Berdasarkan persamaan (n)–(q), dapat disimpulkan batas gaya F yang dapat menyebabkan terjadinya kegagalan pada laminat akibat tegangan tarik pada arah 1 dan arah 2, tegangan tekan pada arah 1 dan 2, serta tegangan geser

τ_{12} positif dan negatif ditunjukkan pada tabel di bawah. Dari tabel tersebut terlihat bahwa besar gaya tekan maksimum yang mampu ditahan oleh silinder adalah sebesar 97,51 kN yang menyebabkan lamina dengan serat arah 30° mengalami kegagalan akibat tegangan geser τ_{12} positif. Kemudian, besar gaya tarik maksimum yang mampu ditahan silinder adalah sebesar 71,98 kN yang menyebabkan lamina dengan serat arah 60° mengalami kegagalan akibat tegangan tarik pada arah 2.

Lamina	Penyebab kegagalan					
	σ_1^{tek}	σ_1^{tar}	σ_2^{tek}	σ_2^{tar}	$-\tau_{12}^{\text{maks}}$	$+\tau_{12}^{\text{maks}}$
30°	-234,45	443,17	-211,11	100,68	97,51	-97,51
45°	-1.423,28	2.757,61	-180,43	79,91	139,75	-139,75
60°	796,14	-1.542,52	-162,53	71,98	467,64	-467,64

Contoh 7.8

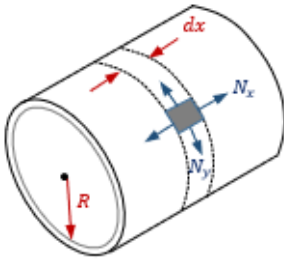
Jika silinder pada Contoh 7.6 berisi gas dan satu-satunya gaya yang bekerja adalah gaya yang dihasilkan oleh tekanan gas, tentukan tekanan gas maksimum yang mampu ditahan oleh silinder tersebut. Asumsikan bahwa gaya yang diberikan oleh tekanan gas jauh lebih besar dibandingkan gaya berat silinder dan gaya berat gas.

Jawab

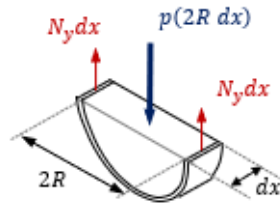
Tekanan gas p akan menghasilkan resultan tegangan pada arah x dan y pada silinder seperti ditunjukkan pada Gambar 1. Untuk menentukan resultan tegangan pada arah y , yaitu N_y , mari kita tinjau gaya-gaya yang bekerja seperti ditunjukkan pada Gambar 2. Perhatikan bahwa kita mengasumsikan bahwa gaya berat silinder dan gaya berat gas sama dengan nol karena gaya yang diberikan oleh tekanan gas jauh lebih besar. Karena gas dan silinder berada dalam keadaan setimbang, dapat dituliskan bahwa

$$\sum F_y = 0,$$

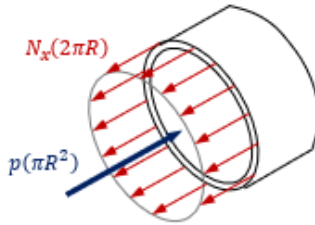
$$2N_y dx - p(2R dx) = 0.$$



(1)



(2)



(3)

Dengan demikian, resultan tegangan N_y adalah

$$2N_y dx = p(2R dx),$$

$$N_y = pR$$

maka

$$N_y = 0,1p \text{ (m)}, \quad (\text{a})$$

dengan (m) adalah satuan jari-jari R .

Kemudian, berdasarkan Gambar 3, dapat dituliskan bahwa

$$\sum F_x = 0,$$

$$N_x(2\pi R) - p(\pi R^2) = 0$$

sehingga resultan gaya N_x adalah

$$N_x(2\pi R) = p(\pi R^2);$$

$$N_x = \frac{pR}{2}$$

maka

$$N_x = 0,05p \text{ (m)}. \quad (b)$$

Karena kita sudah menentukan matriks A^* pada Contoh 7.6, regangan bidang referensi yang dialami oleh laminat adalah

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2,27 & 0,22 & -2,32 \\ 0,22 & 2,27 & -2,32 \\ -2,32 & -2,32 & 6,08 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,05p \\ 0,1p \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{-8} \text{ Pa}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} (1,35 \times 10^{-9}) p \\ (2,38 \times 10^{-9}) p \\ (-3,48 \times 10^{-9}) p \end{bmatrix} \text{ Pa}^{-1}. \end{aligned}$$

Selain itu, karena kelengkungan laminat sama dengan nol, regangan di sepanjang ketebalan laminat bernilai sama sehingga bisa dituliskan bahwa

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1,35 \times 10^{-9}) p \\ (2,38 \times 10^{-9}) p \\ (-3,48 \times 10^{-9}) p \end{bmatrix} \text{ Pa}^{-1}. \quad (c)$$

Kita sudah menentukan matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi dari setiap lamina pada Contoh 7.6. Dengan demikian, dengan cara yang sama, tegangan σ_x , σ_y , dan τ_{xy} pada lamina dengan serat arah 30° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,74 & 2,31 & 4,01 \\ 2,31 & 2,21 & 1,64 \\ 4,01 & 1,64 & 2,96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1,35 \times 10^{-9}) p \\ (2,38 \times 10^{-9}) p \\ (-3,48 \times 10^{-9}) p \end{bmatrix} \times 10^{10}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33,36 p \\ 26,71 p \\ -9,63 p \end{bmatrix}. \quad (d)$$

Kemudian, tegangan σ_x , σ_y , dan τ_{xy} yang bekerja pada laminat dengan serat arah 45° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,79 & 2,99 & 3,26 \\ 2,99 & 4,79 & 3,26 \\ 3,26 & 3,26 & 3,64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1,35 \times 10^{-9}) p \\ (2,38 \times 10^{-9}) p \\ (-3,48 \times 10^{-9}) p \end{bmatrix} \times 10^{10}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22,30 p \\ 40,72 p \\ -5,04 p \end{bmatrix}. \quad (e)$$

Tegangan σ_x , σ_y , dan τ_{xy} yang bekerja pada laminat dengan serat arah 60° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,21 & 2,31 & 1,64 \\ 2,31 & 8,74 & 4,01 \\ 1,64 & 4,01 & 2,96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1,35 \times 10^{-9}) p \\ (2,38 \times 10^{-9}) p \\ (-3,48 \times 10^{-9}) p \end{bmatrix} \times 10^{10}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27,67 p \\ 99,23 p \\ 14,67 p \end{bmatrix} \text{ m}^{-2}. \quad (f)$$

Dengan mentransformasikan persamaan (d)–(f) ke sistem koordinat utama, tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} yang bekerja pada lamina dengan serat arah 30° , 45° , dan 60° secara berturut-turut diberikan oleh persamaan berikut:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23,36 p \\ 36,72 p \\ -7,70 p \end{bmatrix}, \quad (g)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26,47 p \\ 36,55 p \\ 9,21 p \end{bmatrix}, \quad (\text{h})$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 94,05 p \\ 32,86 p \\ 23,65 p \end{bmatrix} \text{ m}^{-2}. \quad (\text{i})$$

Berdasarkan persamaan (g)–(i), karena ruas kanan persamaan-persamaan tersebut bernilai positif—kecuali baris ketiga persamaan (g)—dapat disimpulkan bahwa tekanan gas kemungkinan akan menyebabkan silinder mengalami kegagalan akibat lamina penyusun mengalami tegangan tarik pada arah 1, tegangan tegangan tekan pada arah 2, atau tegangan geser τ_{12} positif. Kemudian, silinder juga mungkin mengalami kegagalan akibat tegangan geser τ_{12} negatif yang bekerja pada lamina dengan serat arah 30° .

Sekarang, mari kita tinjau secara lebih terperinci tegangan-tegangan yang dihasilkan oleh tekanan p . Perhatikan bahwa lamina dengan serat arah 30° akan mengalami kegagalan akibat tegangan tarik pada arah 1, tegangan tarik pada arah 2, dan tegangan geser τ_{12} negatif jika tekanan p yang bekerja secara berturut-turut diberikan oleh baris pertama, kedua dan ketiga pada persamaan berikut.

$$\begin{bmatrix} 23,36 p \\ 36,72 p \\ -7,70 p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.550 \text{ MPa} \\ 62 \text{ MPa} \\ -82 \text{ MPa} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} p \\ p \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66,35 \\ 1,69 \\ 10,65 \end{bmatrix} \text{ MPa}. \quad (\text{j})$$

Kemudian, lamina dengan serat arah 45° akan mengalami kegagalan akibat tegangan tarik pada arah 1, tegangan tarik pada arah 2, dan tegangan geser positif jika tekanan p yang bekerja secara berturut-turut diberikan oleh baris pertama, kedua, dan ketiga pada persamaan berikut.

$$\begin{bmatrix} 26,47 p \\ 36,55 p \\ 9,21 p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.550 \text{ MPa} \\ 62 \text{ MPa} \\ 82 \text{ MPa} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} p \\ p \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58,56 \\ 1,70 \\ 8,90 \end{bmatrix} \text{MPa.} \quad (k)$$

Sementara itu, lamina dengan serat arah 60° akan mengalami kegagalan akibat tegangan tarik pada arah 1, tegangan tarik pada arah 2, dan tegangan geser positif jika tekanan p yang bekerja secara berturut-turut diberikan oleh baris pertama, kedua, dan ketiga pada persamaan berikut.

$$\begin{bmatrix} 94,05 p \\ 32,86 p \\ 23,65 p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.550 \text{ MPa} \\ 62 \text{ MPa} \\ 82 \text{ MPa} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} p \\ p \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16,48 \\ 1,89 \\ 3,47 \end{bmatrix} \text{kN.} \quad (l)$$

Nilai tekanan yang diberikan oleh persamaan (j)–(l) dapat kita rangkum seperti ditunjukkan pada tabel berikut. Berdasarkan tabel tersebut, dapat disimpulkan tekanan p maksimum yang mampu ditahan oleh silinder adalah sebesar 1,69 MPa, yang menyebabkan terjadinya kegagalan akibat tegangan tarik pada arah 2 pada lamina dengan serat arah 30° .

Lamina	Penyebab kegagalan			
	σ_1^{tar}	σ_2^{tar}	$-\tau_{12}^{\text{maks}}$	$+\tau_{12}^{\text{maks}}$
30°	66,35	1,69	10,65	–
45°	58,56	1,70	–	10,65
60°	16,48	1,89	–	3,47

F. Kriteria Kegagalan Regangan Maksimum

Selain kriteria kegagalan tegangan maksimum, juga terdapat teori lain yang dapat digunakan untuk menentukan kekuatan material komposit. Teori tersebut disebut sebagai *kriteria kegagalan regangan maksimum*. Berdasarkan teori

tersebut, suatu lamina akan mengalami kegagalan jika memenuhi kondisi-kondisi berikut.

- 1) Regangan tarik yang dialami lamina pada arah 1 melebihi regangan tarik yang mampu ditahannya pada arah tersebut.
- 2) Regangan tekan yang dialami lamina pada arah 1 melebihi regangan tekan yang mampu ditahannya pada arah tersebut.
- 3) Regangan tarik yang dialami lamina pada arah 2 melebihi regangan tarik yang mampu ditahannya pada arah tersebut.
- 4) Regangan tekan yang dialami lamina pada arah 2 melebihi regangan tarik yang mampu ditahannya pada arah tersebut.
- 5) Regangan geser yang dialami lamina melebihi regangan geser yang mampu ditahan oleh lamina tersebut.

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa suatu laminat tidak akan mengalami kegagalan jika regangan ε_1 , ε_2 , dan γ_{12} yang bekerja pada lamina memenuhi kriteria berikut.

$$\varepsilon_1^{\text{tek}} < \varepsilon_1 < \varepsilon_1^{\text{tar}}, \quad (7.33)$$

$$\varepsilon_2^{\text{tek}} < \varepsilon_2 < \varepsilon_2^{\text{tar}}, \quad (7.34)$$

$$|\gamma_{12}| < \gamma_{12}^{\text{maks}}. \quad (7.35)$$

Besaran $\varepsilon_1^{\text{tek}}$ dan $\varepsilon_1^{\text{tar}}$ secara berturut-turut adalah regangan tekan dan regangan tarik maksimum pada arah 1. Kemudian, $\varepsilon_2^{\text{tek}}$ dan $\varepsilon_2^{\text{tar}}$ secara berturut-turut adalah regangan tekan dan regangan tarik maksimum pada arah 2. Sementara itu, $\gamma_{12}^{\text{maks}}$ merupakan regangan geser maksimum.

Contoh 7.9

Ulangi Contoh 7.2 dengan menggunakan kriteria kegagalan regangan maksimum. Diketahui bahwa $E_1 = 145 \text{ GPa}$, $E_2 = 10 \text{ GPa}$, $G_{12} = 8 \text{ GPa}$ dan $\nu_{12} = 0,25$.

Jawab

Pertama, mari kita tentukan terlebih dahulu batas-batas regangan yang mampu ditahan laminat. Berdasarkan soal dan Contoh 7.1, batas-batas regangan tersebut adalah

$$\varepsilon_1^{\text{tek}} = \frac{\sigma_1^{\text{tek}}}{E_1} = \frac{-750 \text{ MPa}}{145.000 \text{ MPa}} = -0,00517, \quad (a)$$

$$\varepsilon_1^{\text{tar}} = \frac{\sigma_1^{\text{tar}}}{E_1} = \frac{1.800 \text{ Mpa}}{145.000 \text{ Mpa}} = 0,01241, \quad (\text{b})$$

$$\varepsilon_2^{\text{tek}} = \frac{\sigma_2^{\text{tek}}}{E_2} = \frac{-160 \text{ Mpa}}{10.000 \text{ Mpa}} = -0,016, \quad (\text{c})$$

$$\varepsilon_2^{\text{tar}} = \frac{\sigma_2^{\text{tek}}}{E_2} = \frac{50 \text{ Mpa}}{10.000 \text{ Mpa}} = 0,005, \quad (\text{d})$$

$$\gamma_{12}^{\text{maks}} = \frac{\tau_{12}^{\text{maks}}}{G_{12}} = \frac{80 \text{ Mpa}}{8.000 \text{ Mpa}} = 0,01. \quad (\text{e})$$

Pada Contoh 7.2, kita sudah merumuskan tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} yang disebabkan oleh tegangan geser τ_{xy} yang diberikan oleh persamaan (a) pada Contoh tersebut. Dengan demikian, karena

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} = 6,90 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1},$$

$$S_{12} = \frac{-\nu_{12}}{E_1} = -1,72 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1},$$

$$S_{22} = \frac{1}{E_2} = 100 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1},$$

$$S_{66} = \frac{1}{G_{12}} = 125 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}.$$

Regangan ε_1 , ε_2 , dan γ_{12} yang dihasilkan oleh tegangan geser τ_{xy} adalah

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6,90 & -1,72 & 0 \\ -1,72 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,87 \tau_{xy} \\ -0,87 \tau_{xy} \\ 0,5 \tau_{xy} \end{bmatrix} \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1} \end{aligned}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,75 \tau_{xy} \\ -8,85 \tau_{xy} \\ 6,25 \tau_{xy} \end{bmatrix} \times 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}. \quad (f)$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (a)–(e), tegangan geser yang bekerja harus memenuhi pertidaksamaan berikut.

$$\begin{bmatrix} -0,00517 \\ -0,016 \\ -0,01 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0,75 \tau_{xy} \\ -8,85 \tau_{xy} \\ 6,25 \tau_{xy} \end{bmatrix} \times 10^{-11} \text{ Pa}^{-1} < \begin{bmatrix} 0,01241 \\ 0,005 \\ 0,01 \end{bmatrix}$$

atau

$$\begin{bmatrix} -689,33 \text{ MPa} \\ -56,50 \text{ MPa} \\ -160 \text{ MPa} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 1.654,67 \text{ MPa} \\ 180,79 \text{ MPa} \\ 160 \text{ MPa} \end{bmatrix}. \quad (g)$$

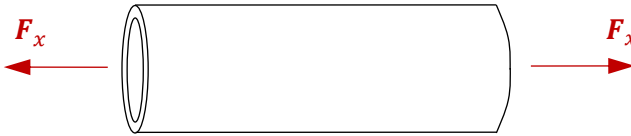
Terlihat bahwa kekuatan geser lamina adalah sebesar 56,50 MPa dan ini tidak jauh berbeda dengan kekuatan geser yang ditentukan dengan menggunakan kriteria kegagalan tegangan maksimum.

Soal-soal

1. Sebuah lamina karbon/epoksi dengan serat arah 30° menerima tegangan σ_x seperti ditunjukkan pada gambar berikut, sedangkan $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$. Tentukan batas tegangan σ_x yang dapat bekerja jika $\sigma_1^{\text{tek}} = -750 \text{ MPa}$, $\sigma_1^{\text{tar}} = 1.700 \text{ Mpa}$, $\sigma_2^{\text{tek}} = -150 \text{ Mpa}$, $\sigma_2^{\text{tar}} = 50 \text{ Mpa}$, dan $\tau_{12}^{\text{maks}} = 80 \text{ MPa}$.



- Ulangi soal nomor 1 dengan menggunakan kriteria kegagalan regangan maksimum. Diketahui bahwa $E_1 = 150$ GPa, $E_2 = 12$ GPa, $G_{12} = 9$ GPa, dan $\nu_{12} = 0,25$.
- Sebuah silinder dengan diameter 0,12 m dibuat dari laminat karbon/epoksi dengan susunan $(60/45/30)_s$ seperti ditunjukkan pada gambar di bawah. Diketahui bahwa ketebalan setiap lamina penyusun adalah 0,3 mm. sifat-sifat lamina penyusun adalah $E_1 = 150$ GPa, $E_2 = 11$ GPa, $G_{12} = 10$ GPa, dan $\nu_{12} = 0,25$. Kemudian, kekuatan lamina penyusun diberikan oleh $\sigma_1^{\text{tek}} = -850$ MPa, $\sigma_1^{\text{tar}} = 1.450$ Mpa, $\sigma_2^{\text{tek}} = -120$ Mpa, $\sigma_2^{\text{tar}} = 62$ Mpa, dan $\tau_{12}^{\text{maks}} = 82$ MPa. Jika satu-satunya gaya yang bekerja pada tabung tersebut adalah gaya aksial (F_x), tentukan gaya maksimum yang bisa ditahan oleh pipa tersebut ketika pipa tersebut ditekan dan ditarik.

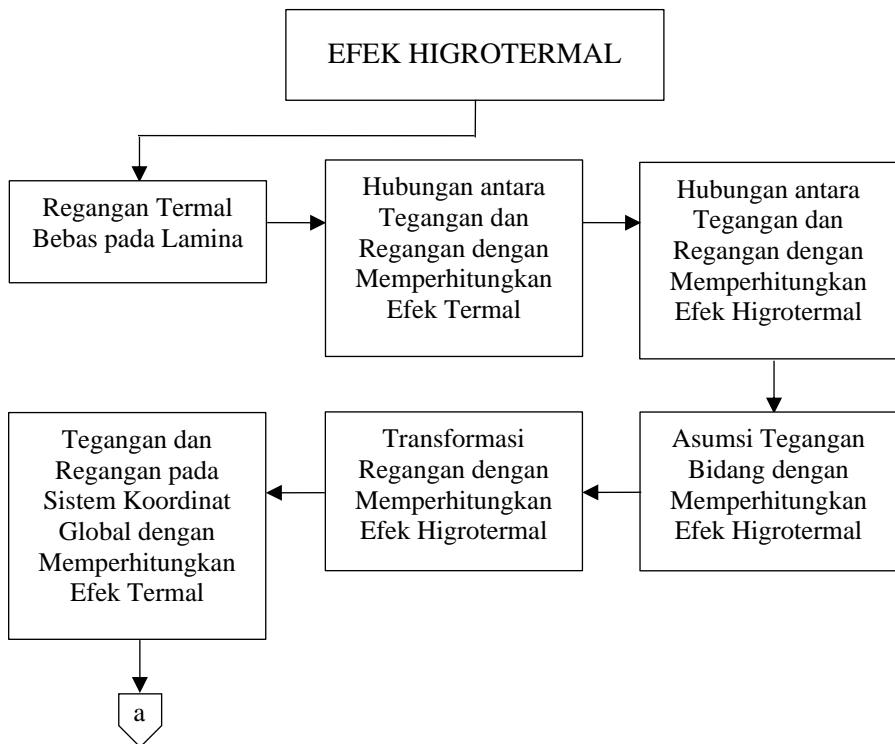


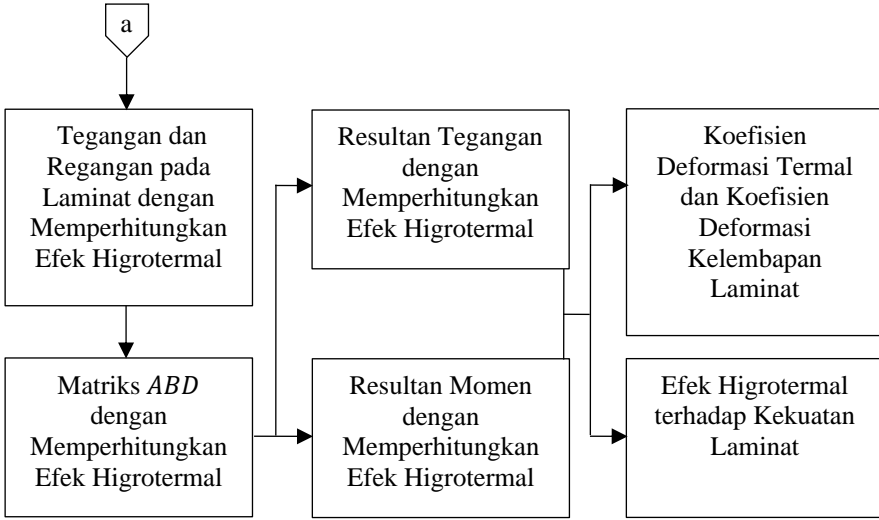
- Buatlah diagram batas kekuatan silinder pada soal nomor 3 dengan tegangan geser $\tau_{xy} = 0$.
- Jika silinder pada soal nomor 3 berisi gas bertekanan dan silinder tersebut menerima tegangan tekan sebesar $\sigma_2 = 500$ MPa, tentukan tekanan gas maksimum yang mampu ditahan oleh silinder tersebut.

BAB VIII

EFEK HIGROTERMAL

Pada bab-bab sebelumnya, kita sudah membahas hubungan antara tegangan dan regangan pada lamina dan laminat. Akan tetapi, seperti material lain, material komposit juga bisa berekspansi atau menyusut akibat perubahan suhu. Artinya, perubahan suhu dapat menyebabkan material komposit mengalami regangan. Selain itu, salah satu sifat polimer yang biasanya berperan sebagai matriks pada material komposit adalah polimer yang lembap dapat berekspansi akibat menyerap cairan di sekitarnya. Dengan kata lain, kelembapan juga dapat menyebabkan material komposit mengalami regangan. Pada bab ini, kita akan membahas efek perubahan suhu dan kelembapan atau efek higrotermal terhadap tegangan dan regangan pada material komposit, baik lamina maupun laminat. Peta konsep bab ini sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 8.1.

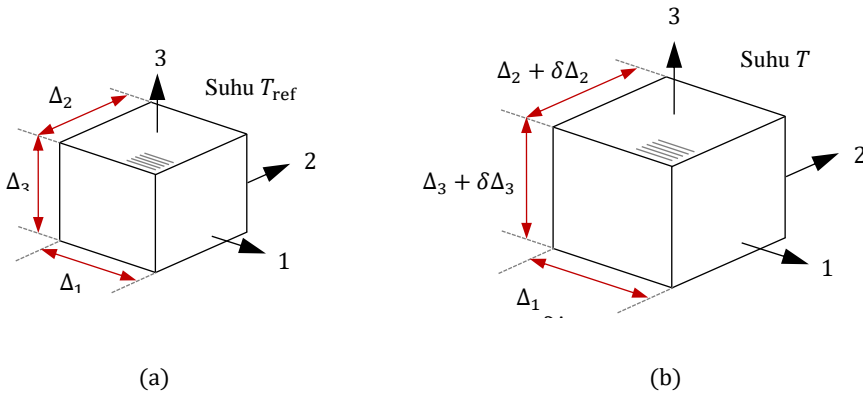




Gambar 8.1 Peta Konsep Bab 8

A. Regangan Termal Bebas pada Lamina

Misalkan pada suatu suhu T_{ref} , sebuah elemen lamina memiliki dimensi Δ_1 , Δ_2 , dan Δ_3 seperti ditunjukkan pada Gambar 8.2. Kemudian, misalkan lamina tersebut dipanaskan hingga suhu T sehingga sisi-sisi lamina tersebut pada arah 1, 2, dan 3 mengalami perubahan panjang sebesar $\delta\Delta_1$, $\delta\Delta_2$ dan $\delta\Delta_3$.



Keterangan: (a) Lamina pada Suhu T_{ref} dan (b) Lamina yang Mengalami Regangan di Arah 1, 2, dan 3 pada suhu T

Gambar 8.2 Pengaruh Suhu pada Elemen Lamina dengan Dimensi Δ_1 , Δ_2 , dan Δ_3

Buku ini tidak diperjualbelikan.

Regangan termal bebas pada arah 1, 2, dan 3 pada suhu T yang misalkan secara berturut-turut disimbolkan sebagai $\varepsilon_1^T(T, T_{\text{ref}})$, $\varepsilon_2^T(T, T_{\text{ref}})$, dan $\varepsilon_3^T(T, T_{\text{ref}})$ didefinisikan sebagai

$$\varepsilon_1^T(T, T_{\text{ref}}) = \frac{\delta\Delta_1}{\Delta_1}, \quad (8.1)$$

$$\varepsilon_2^T(T, T_{\text{ref}}) = \frac{\delta\Delta_2}{\Delta_2}, \quad (8.2)$$

$$\varepsilon_3^T(T, T_{\text{ref}}) = \frac{\delta\Delta_3}{\Delta_3}. \quad (8.3)$$

Ketiga regangan itu disebut sebagai regangan termal bebas. Disebut demikian karena terjadi hanya disebabkan perubahan suhu, bukan karena adanya gaya luar yang bekerja. Dalam hal ini, T_{ref} disebut sebagai suhu referensi dan pemilihan suhu referensi tersebut adalah sembarang sesuai dengan kebutuhan analisis.

Jika kita meninjau interaksi antara serat dan matriks dan jika keduanya memiliki respons terhadap suhu yang berbeda, sebetulnya perubahan suhu dapat menimbulkan tegangan pada elemen lamina tersebut. Misalkan matriks lebih mudah berekspansi daripada serat akibat kenaikan suhu. Akibatnya, ketika suhu elemen lamina makin tinggi, karena matriks dan serat terikat kuat, ekspansi matriks ditahan oleh serat sehingga menimbulkan tegangan tarik pada serat dan tegangan tekan pada matriks. Akan tetapi, dengan mengasumsikan elemen lamina sebagai material yang homogen, regangan termal bebas tidak menyebabkan terjadinya tegangan pada elemen lamina tersebut karena tegangan-tegangan yang bekerja pada serat dan matriks saling menghilangkan.

Jika ekspansi berbanding lurus dengan suhu, kita bisa mendefinisikan *koefisien ekspansi termal* pada arah 1, 2, dan 3 sebagai α_1 , α_2 , dan α_3 sehingga persamaan (8.1)–(8.3) dapat ditulis sebagai

$$\varepsilon_1^T(T, T_{\text{ref}}) = \alpha_1\Delta T, \quad (8.4)$$

$$\varepsilon_2^T(T, T_{\text{ref}}) = \alpha_2\Delta T, \quad (8.5)$$

$$\varepsilon_3^T(T, T_{\text{ref}}) = \alpha_3\Delta T, \quad (8.6)$$

dengan

$$\Delta T = T - T_{\text{ref}}. \quad (8.7)$$

Dengan menyamakan persamaan (8.1) dengan (8.4), dapat dituliskan bahwa

$$\frac{\delta\Delta_1}{\Delta_1} = \alpha_1\Delta T,$$

$$\delta\Delta_1 = \alpha_1\Delta_1\Delta T. \tag{8.8}$$

Dengan cara yang sama, perubahan panjang pada arah 2 dan 3 dapat dirumuskan sebagai

$$\delta\Delta_2 = \alpha_2\Delta_2\Delta T, \tag{8.9}$$

$$\delta\Delta_3 = \alpha_3\Delta_3\Delta T. \tag{8.10}$$

B. Hubungan antara Tegangan dan Regangan dengan Memperhitungkan Efek Termal

Pada bab-bab sebelumnya, kita sudah membahas bahwa regangan disebabkan oleh adanya tegangan yang bekerja. Karena kita sudah mengetahui bahwa regangan juga disebabkan oleh perubahan suhu, kita perlu menulis ulang hubungan antara tegangan dan regangan tersebut dengan cara yang sedikit berbeda. Dalam bentuk umum, hubungan antara tegangan dan regangan diberikan oleh persamaan (3.25). Karena regangan-regangan pada persamaan tersebut dihasilkan oleh tegangan-tegangan yang bekerja, persamaan tersebut dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1^{\text{mek}} \\ \varepsilon_2^{\text{mek}} \\ \varepsilon_3^{\text{mek}} \\ \gamma_{23}^{\text{mek}} \\ \gamma_{13}^{\text{mek}} \\ \gamma_{12}^{\text{mek}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}. \tag{8.11}$$

Superskrip “mek” menunjukkan bahwa regangan yang dimaksud merupakan regangan akibat tegangan luar yang bekerja. Regangan tersebut disebut sebagai *regangan mekanik*.

Perhatikan bahwa pada sistem koordinat utama, perubahan suhu hanya menyebabkan ekspansi atau kompresi yang hanya menyebabkan perubahan dimensi, bukan perubahan bentuk. Ini berarti bahwa perubahan suhu tidak

menyebabkan regangan geser seperti yang ditunjukkan pada Gambar 8.2. Jika sebuah lamina mengalami perubahan dimensi akibat tegangan luar dan perubahan suhu, regangan total yang dialami elemen lamina tersebut merupakan penjumlahan regangan mekanik dan regangan termal bebas. Jika regangan total adalah

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix},$$

dapat dituliskan bahwa

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^{\text{mek}} \\ \varepsilon_2^{\text{mek}} \\ \varepsilon_3^{\text{mek}} \\ \gamma_{23}^{\text{mek}} \\ \gamma_{13}^{\text{mek}} \\ \gamma_{12}^{\text{mek}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ \varepsilon_3^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1^{\text{mek}} \\ \varepsilon_2^{\text{mek}} \\ \varepsilon_3^{\text{mek}} \\ \gamma_{23}^{\text{mek}} \\ \gamma_{13}^{\text{mek}} \\ \gamma_{12}^{\text{mek}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ \varepsilon_3^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1^{\text{mek}} \\ \varepsilon_2^{\text{mek}} \\ \varepsilon_3^{\text{mek}} \\ \gamma_{23}^{\text{mek}} \\ \gamma_{13}^{\text{mek}} \\ \gamma_{12}^{\text{mek}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_2^T \\ \varepsilon_3 - \varepsilon_3^T \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (8.12)$$

Dengan menyubstitusikan persamaan (8.12) ke persamaan (8.11), diperoleh

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_2^T \\ \varepsilon_3 - \varepsilon_3^T \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}. \quad (8.13)$$

Persamaan (8.13) memberikan hubungan antara tegangan dan regangan ketika lamina juga mengalami regangan bebas termal. Jika regangan termal bebas sama dengan nol, kita kembali ke hubungan tegangan dan regangan yang diberikan oleh persamaan (3.25). Kemudian, dengan mengalikan kedua ruas persamaan (8.13) dengan invers dari matriks komplan, dapat dituliskan bahwa

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_2^T \\ \varepsilon_3 - \varepsilon_3^T \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}, \quad (8.14)$$

dengan matriks 6×6 pada persamaan (8.14) merupakan matriks kekakuan seperti yang sudah kita bahas pada Bab III. Kemudian, berdasarkan persamaan (8.8)–(8.10), persamaan (8.13) juga bisa ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1 \Delta T \\ \varepsilon_2 - \alpha_2 \Delta T \\ \varepsilon_3 - \alpha_3 \Delta T \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (8.15)$$

dan persamaan (8.14) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1 \Delta T \\ \varepsilon_2 - \alpha_2 \Delta T \\ \varepsilon_3 - \alpha_3 \Delta T \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (8.16)$$

C. Hubungan antara Tegangan dan Regangan dengan Memperhitungkan Efek Higrotermal

Salah satu sifat polimer adalah polimer tersebut dapat menyerap cairan di sekitarnya. Penyerapan tersebut menyebabkan polimer berekspansi. Dengan demikian, material komposit dengan matriks polimer juga dapat berekspansi atau menyusut akibat pengaruh kelembapan.

Pada material komposit dengan matriks polimer, regangan yang terjadi dapat diasumsikan berbanding lurus dengan nilai kelembapan. Nilai kelembapan material komposit menunjukkan persentase massa zat cair yang diserap dari total massa material komposit tersebut. Kemudian, seperti pendefinisian regangan termal bebas, kita bisa mendefinisikan *regangan kelembapan bebas* pada arah 1, 2, dan 3 secara berturut-turut sebagai $\varepsilon_1^M(M, M_{\text{ref}})$, $\varepsilon_2^M(M, M_{\text{ref}})$, dan $\varepsilon_3^M(M, M_{\text{ref}})$. Ketiga besaran tersebut dirumuskan sebagai

$$\varepsilon_1^M(M, M_{\text{ref}}) = \beta_1 \Delta M, \quad (8.17)$$

$$\varepsilon_2^M(M, M_{\text{ref}}) = \beta_2 \Delta M, \quad (8.18)$$

$$\varepsilon_3^M(M, M_{\text{ref}}) = \beta_3 \Delta M, \quad (8.19)$$

dengan

$$\Delta M = M - M_{\text{ref}}. \quad (8.20)$$

Besaran β_1 , β_2 , dan β_3 secara berturut-turut merupakan koefisien *ekspansi kelembapan* pada arah 1, 2, dan 3. Kemudian, karena $\varepsilon = \delta\Delta/\Delta$, dapat dituliskan bahwa

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Delta_1}{\Delta_1} &= \beta_1 \Delta M, \\ \delta\Delta_1 &= \beta_1 \Delta_1 \Delta M. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Dengan cara yang sama, pada arah 2 dan 3, kita dapat menuliskan bahwa

$$\delta\Delta_2 = \beta_2 \Delta_2 \Delta M, \quad (8.22)$$

$$\delta\Delta_3 = \beta_3 \Delta_3 \Delta M. \quad (8.23)$$

Sama seperti regangan termal bebas, regangan kelembapan bebas hanya menyebabkan perubahan dimensi dan tidak menyebabkan perubahan bentuk. Ini berarti bahwa perubahan kelembapan tidak menyebabkan terjadinya regangan geser.

Sekarang, misalkan terdapat tegangan yang bekerja pada elemen lamina. Kemudian, perubahan suhu dan perubahan kelembapan juga terjadi. Akibatnya, elemen lamina tersebut mengalami regangan mekanik, regangan termal bebas, dan regangan kelembapan bebas. Dengan demikian, regangan total yang dialami oleh elemen laminat tersebut sama dengan penjumlahan regangan mekanik, regangan termal bebas, dan regangan kelembapan bebas, yaitu

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^{\text{mek}} \\ \varepsilon_2^{\text{mek}} \\ \varepsilon_3^{\text{mek}} \\ \gamma_{23}^{\text{mek}} \\ \gamma_{13}^{\text{mek}} \\ \gamma_{12}^{\text{mek}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ \varepsilon_3^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1^M \\ \varepsilon_2^M \\ \varepsilon_3^M \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.24)$$

sehingga regangan mekanik dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1^{\text{mek}} \\ \varepsilon_2^{\text{mek}} \\ \varepsilon_3^{\text{mek}} \\ \gamma_{23}^{\text{mek}} \\ \gamma_{13}^{\text{mek}} \\ \gamma_{12}^{\text{mek}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1 \Delta T - \beta_1 \Delta M \\ \varepsilon_2 - \alpha_2 \Delta T - \beta_2 \Delta M \\ \varepsilon_3 - \alpha_3 \Delta T - \beta_3 \Delta M \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (8.25)$$

Dengan menyubstitusikan persamaan (8.25) ke persamaan (8.11), hubungan antara tegangan dan regangan dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1 \Delta T - \beta_1 \Delta M \\ \varepsilon_2 - \alpha_2 \Delta T - \beta_2 \Delta M \\ \varepsilon_3 - \alpha_3 \Delta T - \beta_3 \Delta M \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}. \quad (8.26)$$

Kemudian, dengan mengalikan kedua ruas persamaan (8.26) dengan invers matriks komplan, dapat dituliskan bahwa

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1 \Delta T - \beta_1 \Delta M \\ \varepsilon_2 - \alpha_2 \Delta T - \beta_2 \Delta M \\ \varepsilon_3 - \alpha_3 \Delta T - \beta_3 \Delta M \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (8.27)$$

Persamaan (8.26) dan (8.27) merupakan bentuk umum dari persamaan yang memberikan hubungan antara tegangan dan regangan pada elemen lamina. Pada kedua persamaan tersebut, efek higrotermal, yaitu efek termal dan efek kelembapan juga diperhitungkan.

D. Asumsi Tegangan Bidang dengan Memperhitungkan Efek Higrotermal

Pada bab-bab sebelumnya kita sudah menggunakan asumsi tegangan bidang tanpa memperhitungkan efek higrotermal. Sekarang, kita gunakan asumsi tersebut dengan memperhitungkan efek higrotermal. Dengan memperhitungkan efek higrotermal, berdasarkan asumsi tegangan bidang yang mengasumsikan bahwa σ_3 , τ_{13} , dan τ_{23} sama dengan nol, persamaan (8.26) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1 \Delta T - \beta_1 \Delta M \\ \varepsilon_2 - \alpha_2 \Delta T - \beta_2 \Delta M \\ \varepsilon_3 - \alpha_3 \Delta T - \beta_3 \Delta M \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}. \quad (8.28)$$

Kemudian, seperti yang sudah kita lakukan sebelumnya, dengan merumuskan regangan ε_3 secara terpisah, persamaan (8.28) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1 \Delta T - \beta_1 \Delta M \\ \varepsilon_2 - \alpha_2 \Delta T - \beta_2 \Delta M \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}. \quad (8.29)$$

Kemudian, berdasarkan baris ketiga persamaan (8.28), regangan ε_3 dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 - \alpha_3 \Delta T - \beta_3 \Delta M &= S_{13} \sigma_1 + S_{23} \sigma_2; \\ \varepsilon_3 &= \alpha_3 \Delta T + \beta_3 \Delta M + S_{13} \sigma_1 + S_{23} \sigma_2. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Terlihat bahwa regangan pada arah 3 tidak lagi hanya dipengaruhi oleh $S_{13} \sigma_1$ dan $S_{23} \sigma_2$, tetapi juga dipengaruhi oleh kelembapan dan suhu.

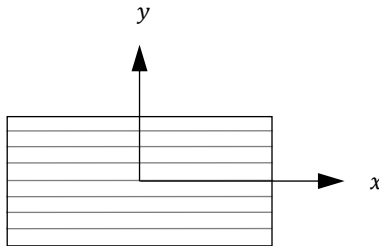
Selanjutnya, dengan mengalikan kedua ruas persamaan (8.29) dengan invers dari matriks komplan tereduksi, akan diperoleh

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1 \Delta T - \beta_1 \Delta M \\ \varepsilon_2 - \alpha_2 \Delta T - \beta_2 \Delta M \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}, \quad (8.31)$$

dengan matriks 3×3 pada ruas kanan persamaan (8.31) merupakan matriks kekakuan tereduksi seperti yang sudah kita tentukan pada Bab III.

Contoh 8.1

Sebuah elemen lamina dengan serat arah 0° mengalami kenaikan suhu sebesar 60°C seperti ditunjukkan pada gambar di bawah. Tentukan regangan pada arah 1 dan 2 yang dialami lamina akibat kenaikan suhu tersebut jika sifat dari lamina tersebut diberikan oleh $E_1 = 150 \text{ GPa}$, $E_2 = 10 \text{ GPa}$, $G_{12} = 9 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0,25$, $\alpha_1 = -0,018 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$, $\alpha_2 = 24,3 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$, $\beta_1 = 146 \times 10^{-6} / \%$, dan $\beta_2 = 4.770 \times 10^{-6} / \%$. Selama kenaikan suhu terjadi, lamina tidak menerima gaya luar dan juga tidak mengalami perubahan kelembapan.



Jawab

Karena lamina tidak mengalami perubahan kelembapan, regangan kelembapan bebas sama dengan nol. Selain itu, karena tidak ada gaya luar atau tegangan luar yang bekerja pada lamina, regangan total yang dialami oleh lamina hanya regangan termal bebas, yaitu regangan yang hanya disebabkan oleh perubahan suhu. Dengan demikian, regangan lamina pada arah 1 dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (8.4), yaitu

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_1^T(T, T_{\text{ref}}) = \alpha_1 \Delta T = (-0,018 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C})(60^\circ\text{C}) \\ &= -1,08 \times 10^{-7}.\end{aligned}$$

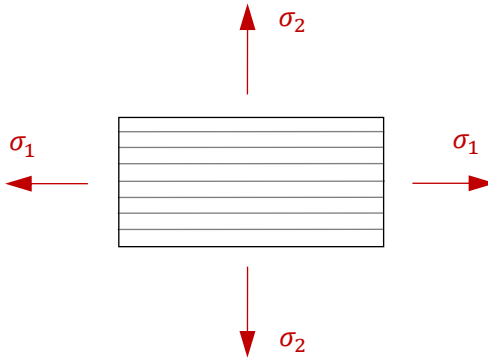
Sementara itu, lamina pada arah 2 dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (8.5), yaitu

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= \varepsilon_2^T(T, T_{\text{ref}}) = \alpha_2 \Delta T = (24,3 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C})(60^\circ\text{C}) \\ &= 0,001458.\end{aligned}$$

Ingat bahwa perubahan suhu tidak menyebabkan terjadinya regangan geser γ_{12} .

Contoh 8.2

Sebuah lamina yang memiliki sifat yang sama dengan lamina pada Contoh 8.1 mengalami penurunan suhu sebesar 70°C. Selama penurunan suhu tersebut, lamina menyerap uap lembap sebesar 0,45% dari massanya. Tentukan tegangan yang harus diberikan supaya perubahan dimensi dari lamina tidak terjadi selama proses tersebut.



Jawab

Tegangan yang harus bekerja pada lamina dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (8.31). Oleh sebab itu, mari kita tentukan terlebih dahulu matriks kekakuan tereduksi dari lamina. Matriks kekakuan tereduksi dari lamina adalah Q , yaitu

$$Q = \begin{bmatrix} 150,63 & 2,51 & 0 \\ 2,51 & 10,04 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \times 10^9 \text{ Pa.}$$

Karena lamina tidak mengalami perubahan dimensi, ini berarti bahwa regangan total yang dialami oleh lamina sama dengan nol, yaitu $\epsilon_1 = 0$, $\epsilon_2 = 0$, dan $\gamma_{12} = 0$. Dengan demikian, berdasarkan persamaan (8.31), dapat dituliskan bahwa

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 - \alpha_1 \Delta T - \beta_1 \Delta M \\ 0 - \alpha_2 \Delta T - \beta_2 \Delta M \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 150,63 & 2,51 & 0 \\ 2,51 & 10,04 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \\
&\quad \begin{bmatrix} -(-0,018 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C})(-70^\circ\text{C}) - (146 \times 10^{-6} / \%) (0,45\%) \\ - (24,3 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C})(-70^\circ\text{C}) - (4.770 \times 10^{-6} / \%) (0,45\%) \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^9 \text{ Pa} \\
&= \begin{bmatrix} -11,20 \\ -4,64 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ MPa.}
\end{aligned}$$

Terlihat bahwa tegangan σ_1 dan σ_2 yang bekerja bernilai negatif dan ini berarti bahwa kedua tegangan tersebut merupakan tegangan tekan.

E. Transformasi Regangan dengan Memperhitungkan Efek Higrotermal

Untuk memperoleh hubungan antara regangan akibat efek termal pada sistem koordinat utama dan regangan pada sistem koordinat global, kita bisa menggunakan persamaan (4.38)–(4.40). Karena efek termal tidak menimbulkan regangan geser, persamaan (4.38) lebih baik ditulis sebagai

$$\varepsilon_x^T = \varepsilon_1^T \cos^2 \theta + \varepsilon_2^T \sin^2 \theta + 2 \left(\frac{1}{2} \gamma_{12}^T \right) \sin \theta, \quad (8.32)$$

dengan γ_{12}^T , ε_x^T , ε_1^T , dan ε_2^T secara berturut-turut merupakan regangan geser pada sistem koordinat utama akibat efek termal dan regangan normal akibat efek termal pada arah x , 1, dan 2. Artinya, persamaan (8.32) memberikan rumusan untuk menentukan regangan ε_x^T jika θ dan regangan termal bebas pada sistem koordinat utama diketahui. Keuntungan penulisan seperti persamaan tersebut adalah karena efek termal tidak menyebabkan regangan geser, $\gamma_{12}^T = 0$ sehingga hubungan antara ε_x^T dan regangan pada sistem koordinat utama dapat ditulis dalam bentuk yang lebih sederhana, yaitu

$$\varepsilon_x^T = \varepsilon_1^T \cos^2 \theta + \varepsilon_2^T \sin^2 \theta. \quad (8.33)$$

Kemudian, regangan ε_y^T , yaitu regangan akibat efek termal pada arah y dapat dirumuskan dengan menuliskan persamaan (4.39) menjadi

$$\varepsilon_y^T = \varepsilon_1^T \sin^2 \theta + \varepsilon_2^T \cos^2 \theta - 2 \left(\frac{1}{2} \gamma_{12}^T \right) \sin \theta \cos \theta. \quad (8.34)$$

Dengan demikian, karena $\gamma_{12}^T = 0$, persamaan (8.34) dapat ditulis sebagai

$$\varepsilon_y^T = \varepsilon_1^T \sin^2 \theta + \varepsilon_2^T \cos^2 \theta. \quad (8.35)$$

Selanjutnya, meskipun γ_{12}^T sama dengan nol, ini bukan berarti bahwa regangan geser pada sistem koordinat global akibat efek termal, yaitu γ_{xy}^T , sama dengan nol. Berdasarkan persamaan (4.40), dapat dituliskan bahwa

$$\frac{1}{2} \gamma_{xy}^T = -\varepsilon_1^T \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_2^T \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \gamma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (8.36)$$

sehingga

$$\frac{1}{2} \gamma_{xy}^T = -\varepsilon_1^T \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_2^T \sin \theta \cos \theta$$

maka

$$\frac{1}{2} \gamma_{xy}^T = (\varepsilon_2^T - \varepsilon_1^T) \sin \theta \cos \theta. \quad (8.37)$$

Berdasarkan persamaan (8.33), (8.35) dan (8.37), kita bisa mendefinisikan besaran baru sedemikian rupa sehingga regangan pada sistem koordinat global akibat efek termal dapat ditulis sebagai

$$\varepsilon_x^T = \alpha_x \Delta T, \quad (8.38)$$

$$\varepsilon_y^T = \alpha_y \Delta T, \quad (8.39)$$

$$\gamma_{xy}^T = \alpha_{xy} \Delta T. \quad (8.40)$$

Besaran baru α_x , α_y , dan α_{xy} disebut sebagai *koefisien deformasi termal* pada sistem koordinat global.

Untuk menentukan hubungan antara koefisien ekspansi termal dengan koefisien deformasi termal, kita perlu menuliskan terlebih dahulu persamaan (8.33), (8.35), dan (8.37) dalam bentuk yang sedikit berbeda. Karena $\varepsilon_1^T = \alpha_1 \Delta T$, persamaan (8.33) dapat ditulis sebagai

$$\varepsilon_x^T = \alpha_1 \Delta T \cos^2 \theta + \alpha_2 \Delta T \sin^2 \theta$$

maka

$$\varepsilon_x^T = (\alpha_1 \cos^2 \theta + \alpha_2 \sin^2 \theta) \Delta T. \quad (8.41)$$

Kemudian, karena $\varepsilon_y^T = \alpha_2 \Delta T$, persamaan (8.35) dapat ditulis sebagai

$$\varepsilon_y^T = \alpha_1 \Delta T \sin^2 \theta + \alpha_2 \Delta T \cos^2 \theta$$

maka

$$\varepsilon_y^T = (\alpha_1 \sin^2 \theta + \alpha_2 \cos^2 \theta) \Delta T. \quad (8.42)$$

Selanjutnya, persamaan (8.37) dapat ditulis sebagai

$$\frac{1}{2} \gamma_{xy}^T = (\alpha_1 \Delta T - \alpha_2 \Delta T) \sin \theta \cos \theta$$

maka

$$\frac{1}{2} \gamma_{xy}^T = (\alpha_1 - \alpha_2) \sin \theta \cos \theta \Delta T. \quad (8.43)$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (8.38)–(8.40) dan (8.41)–(8.43), hubungan antara koefisien ekspansi termal dan koefisien deformasi termal dapat ditulis sebagai

$$\alpha_x = \alpha_1 \cos^2 \theta + \alpha_2 \sin^2 \theta, \quad (8.44)$$

$$\alpha_y = \alpha_1 \sin^2 \theta + \alpha_2 \cos^2 \theta, \quad (8.45)$$

$$\alpha_{xy} = 2 (\alpha_1 - \alpha_2) \sin \theta \cos \theta. \quad (8.46)$$

Selanjutnya, perhatikan bahwa karena efek kelembapan memiliki bentuk yang sama dengan efek termal, transformasi regangan kelembapan bebas dari sistem koordinat utama ke sistem koordinat global juga seperti yang diberikan oleh persamaan (8.33), (8.35), dan (8.37). Kemudian, kita juga bisa mendefinisikan besaran baru sedemikian rupa sehingga

$$\varepsilon_x^M = \beta_x \Delta T, \quad (8.47)$$

$$\varepsilon_y^M = \beta_y \Delta T, \quad (8.48)$$

$$\gamma_{xy}^M = \beta_{xy} \Delta T. \quad (8.49)$$

Besaran β_x , β_y , dan β_{xy} disebut sebagai *koefisien deformasi kelembapan*. Dengan demikian, seperti hubungan antara koefisien ekspansi termal dengan koefisien deformasi termal, kita juga bisa menuliskan hubungan antara koefisien ekspansi kelembapan dengan koefisien deformasi kelembapan menjadi

$$\beta_x = \beta_1 \cos^2 \theta + \beta_2 \sin^2 \theta, \quad (8.50)$$

$$\beta_y = \beta_1 \sin^2 \theta + \beta_2 \cos^2 \theta, \quad (8.51)$$

$$\beta_{xy} = 2(\beta_1 - \beta_2) \sin \theta \cos \theta. \quad (8.52)$$

Contoh 8.3

Tentukan koefisien deformasi termal α_x , α_y , dan α_{xy} dari lamina dengan serat arah 45° . Kemudian, tentukan juga koefisien deformasi kelembapan β_x , β_y , dan β_{xy} dari lamina tersebut. Diketahui bahwa sifat-sifat dari lamina tersebut sama dengan sifat-sifat lamina pada Contoh 8.1.

Jawab

a) Berdasarkan persamaan (8.44), koefisien deformasi termal α_x adalah

$$\begin{aligned} \alpha_x &= (-0,018 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}) (\cos^2 45^\circ) + (24,3 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}) (\sin^2 45^\circ) \\ &= 1,21 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

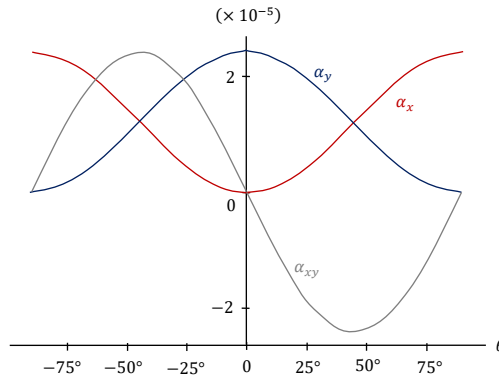
Kemudian, berdasarkan persamaan (8.45), koefisien deformasi termal α_y adalah

$$\begin{aligned} \alpha_y &= (-0,018 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}) (\sin^2 45^\circ) + (24,3 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}) (\cos^2 45^\circ) \\ &= 1,21 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Sementara itu, berdasarkan persamaan (8.46), koefisien deformasi termal α_{xy} adalah

$$\begin{aligned} \alpha_{xy} &= 2 \left[(-0,018 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}) - (24,3 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}) \right] \sin 45^\circ \cos 45^\circ \\ &= 2,43 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (8.44)–(8.46), jika koefisien deformasi termal α_x , α_y , dan α_{xy} diplot sebagai fungsi arah serat pada rentang $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, akan tampak seperti pada gambar di bawah.



- b) Berdasarkan persamaan (8.50), koefisien deformasi kelembapan β_x adalah

$$\begin{aligned}\beta_x &= \left(146 \times 10^{-6} \text{ /\%}\right) \left(\cos^2 45^\circ\right) + \left(4.770 \times 10^{-6} \text{ /\%}\right) \left(\sin^2 45^\circ\right) \\ &= 0,00246 \text{ /\%}.\end{aligned}$$

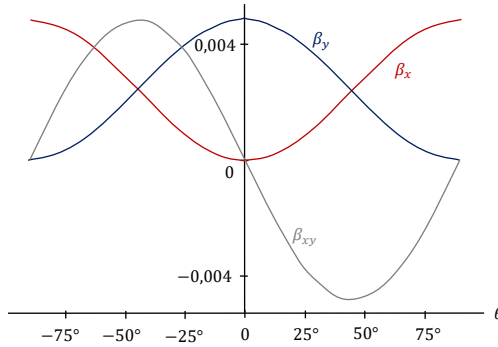
Kemudian, berdasarkan persamaan (8.51), koefisien deformasi kelembapan β_y adalah

$$\begin{aligned}\beta_y &= \left(146 \times 10^{-6} \text{ /\%}\right) \left(\sin^2 45^\circ\right) + \left(4.770 \times 10^{-6} \text{ /\%}\right) \left(\cos^2 45^\circ\right) \\ &= 0,00246 \text{ /\%}.\end{aligned}$$

Sementara itu, berdasarkan persamaan (8.52), koefisien deformasi kelembapan β_{xy} adalah

$$\begin{aligned}\beta_{xy} &= 2 \left[\left(146 \times 10^{-6} \text{ /\%}\right) - \left(4.770 \times 10^{-6} \text{ /\%}\right) \right] \sin 45^\circ \cos 45^\circ \\ &= -0,00452 \text{ /\%}.\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (8.50)–(8.52), jika koefisien deformasi kelembapan β_x , β_y , dan β_{xy} diplot sebagai fungsi arah serat pada rentang $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, akan seperti ditunjukkan pada gambar berikut.



F. Tegangan dan Regangan pada Sistem Koordinat Global dengan Memperhitungkan Efek Higrotermal

Sekarang, mari kita tentukan hubungan antara tegangan dan regangan lamina pada sistem koordinat global dengan memperhitungkan efek higrotermal. Proses penentuan hubungan tersebut sama seperti yang kita lakukan pada Bab IV. Perhatikan bahwa persamaan (8.29) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_1 \Delta T \\ \alpha_2 \Delta T \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta_1 \Delta M \\ \beta_2 \Delta M \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}. \quad (8.53)$$

Untuk menuliskan hubungan antara tegangan dan regangan pada sistem koordinat global, regangan pada ruas kiri dan tegangan pada ruas kanan persamaan tersebut perlu ditransformasikan terlebih dahulu ke sistem koordinat global. Kita sudah mengetahui bahwa

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (8.54)$$

dan

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}. \quad (8.55)$$

Kemudian, berdasarkan persamaan (8.44)–(8.46), dapat dituliskan bahwa

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.56)$$

Karena baris ketiga pada matriks paling kanan sama dengan nol, kolom ketiga pada matriks 3×3 pada persamaan (8.56) tidak akan mengubah rumusan koefisien deformasi termal α_x , α_y , dan α_{xy} . Namun, dengan menuliskan matriks 3×3 pada persamaan tersebut dengan cara yang seperti itu, matriks tersebut menjadi sama dengan invers dari matriks transformasi. Dengan mengalikan baris pertama dan kedua pada kedua ruas persamaan (8.56) dengan ΔT dan baris ketiganya dengan $(1/2)\Delta T$, persamaan tersebut menjadi

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \Delta T \\ \alpha_y \Delta T \\ \frac{1}{2} \alpha_{xy} \Delta T \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \Delta T \\ \alpha_2 \Delta T \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.57)$$

Dengan demikian, dengan mengalikan kedua ruas persamaan (8.57) dengan matriks transformasi T , kita memperoleh

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \Delta T \\ \alpha_2 \Delta T \\ 0 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \alpha_x \Delta T \\ \alpha_y \Delta T \\ \frac{1}{2} \alpha_{xy} \Delta T \end{bmatrix}. \quad (8.58)$$

Dengan cara yang sama, kita juga bisa menuliskan bahwa

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \Delta T \\ \beta_2 \Delta T \\ 0 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \beta_x \Delta T \\ \beta_y \Delta T \\ \frac{1}{2} \beta_{xy} \Delta T \end{bmatrix}. \quad (8.59)$$

Selanjutnya, dengan menyubstitusikan persamaan (8.55), (8.57), (8.58), dan (8.59) ke persamaan (8.53), diperoleh

$$T \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{bmatrix} - T \begin{bmatrix} \alpha_x \Delta T \\ \alpha_y \Delta T \\ \frac{1}{2}\alpha_{xy} \Delta T \end{bmatrix} - T \begin{bmatrix} \beta_x \Delta T \\ \beta_y \Delta T \\ \frac{1}{2}\beta_{xy} \Delta M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}S_{66} \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

sehingga

$$T \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \alpha_x \Delta T - \beta_x \Delta M \\ \varepsilon_y - \alpha_y \Delta T - \beta_y \Delta M \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} - \frac{1}{2}\alpha_{xy} \Delta T - \frac{1}{2}\beta_{xy} \Delta M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}S_{66} \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (8.60)$$

Dengan demikian, dengan mengalikan kedua ruas persamaan (8.60) dengan T^{-1} dan dengan mengalikan baris ketiganya dengan 2, hubungan antara tegangan dan regangan pada sistem koordinat global dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x - \alpha_x \Delta T - \beta_x \Delta M \\ \varepsilon_y - \alpha_y \Delta T - \beta_y \Delta M \\ \gamma_{xy} - \alpha_{xy} \Delta T - \beta_{xy} \Delta M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, \quad (8.61)$$

dengan matriks 3×3 pada ruas kanan persamaan (8.61) merupakan matriks komplan tereduksi yang ditransformasi seperti yang sudah kita definisikan pada Bab IV.

Selanjutnya, dengan mengalikan kedua ruas persamaan (8.61) dengan invers dari matriks komplan tereduksi yang ditransformasi, akan diperoleh

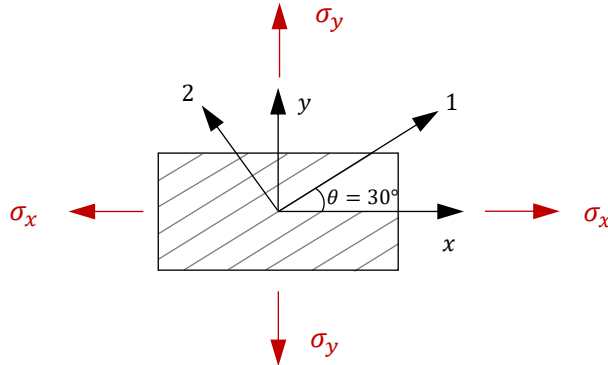
$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \alpha_x \Delta T - \beta_x \Delta M \\ \varepsilon_y - \alpha_y \Delta T - \beta_y \Delta M \\ \gamma_{xy} - \alpha_{xy} \Delta T - \beta_{xy} \Delta M \end{bmatrix}, \quad (8.62)$$

dengan matriks 3×3 pada ruas kanan persamaan (8.62) merupakan matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi seperti yang sudah kita definisikan pada Bab IV.

Contoh 8.4

Sebuah elemen lamina dengan serat arah 30° mengalami kenaikan suhu sebesar 35°C seperti ditunjukkan pada gambar di bawah. Kemudian, selama kenaikan

suhu tersebut, diketahui bahwa kelembapan lamina tidak berubah. Tentukan tegangan dari luar yang perlu diberikan untuk mempertahankan ukuran dan bentuk dari elemen lamina tersebut. Diketahui bahwa $E_1 = 140 \text{ GPa}$, $E_2 = 8 \text{ GPa}$, $G_{12} = 8 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0,25$, $\alpha_1 = -0,015 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$, $\alpha_2 = 22 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$, $\beta_1 = 140 \times 10^{-6} / \%$, dan $\beta_2 = 4.500 \times 10^{-6} / \%$.



Jawab

Persoalan ini dapat diselesaikan dengan menggunakan persamaan (8.62). Untuk itu, kita perlu terlebih dahulu menentukan matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi dari lamina. Seperti yang sudah kita lakukan pada bab-bab sebelumnya, matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi dari lamina adalah

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,63 & 2,31 & 4,09 \\ 2,31 & 2,01 & 1,65 \\ 4,09 & 1,65 & 2,91 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa.} \quad (a)$$

Kemudian, karena arah serat lamina adalah pada arah 30° , kita juga perlu menentukan koefisien deformasi termal dari lamina tersebut. Berdasarkan persamaan (8.44), koefisien deformasi termal α_x adalah

$$\begin{aligned} \alpha_x &= (-0,015 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}) (\cos^2 35^\circ) + (22 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}) (\sin^2 35^\circ) \\ &= 5,49 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}. \end{aligned} \quad (b)$$

Kemudian, berdasarkan persamaan (8.45), koefisien deformasi termal α_x adalah

$$\alpha_y = (-0,015 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}) (\sin^2 45^\circ) + (22 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}) (\cos^2 45^\circ)$$

Buku ini tidak diperjualbelikan.

$$= 1,65 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}. \quad (\text{c})$$

Sementara itu, berdasarkan persamaan (8.46), koefisien deformasi termal α_{xy} adalah

$$\begin{aligned} \alpha_{xy} &= 2 \left[\left(-0,015 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C} \right) - \left(22 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C} \right) \right] \sin 35^\circ \cos 35^\circ \\ &= -1,91 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}. \quad (\text{d}) \end{aligned}$$

Karena kelembapan lamina tidak berubah, kita tidak perlu menentukan koefisien deformasi kelembapannya. Selain itu, karena tegangan-tegangan yang bekerja mempertahankan ukuran dan bentuk lamina, ini berarti bahwa regangan total lamina sama dengan nol maka $\epsilon_x = 0$, $\epsilon_y = 0$ dan $\gamma_{xy} = 0$. Dengan demikian, berdasarkan persamaan (8.62) dan persamaan (a)–(d), dapat dituliskan bahwa

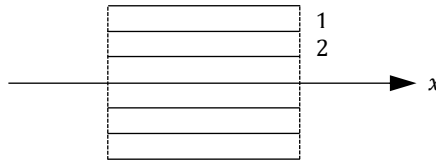
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 8,63 & 2,31 & 4,09 \\ 2,31 & 2,01 & 1,65 \\ 4,09 & 1,65 & 2,91 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 - \left(5,49 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C} \right) (35^\circ\text{C}) - 0 \\ 0 - \left(1,65 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C} \right) (35^\circ\text{C}) - 0 \\ 0 - \left(-1,91 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C} \right) (35^\circ\text{C}) - 0 \end{bmatrix} \\ &\quad \times 10^{10} \text{ Pa} \\ &= \begin{bmatrix} -2,65 \\ -5,00 \\ 2,04 \end{bmatrix} \text{MPa}. \end{aligned}$$

Tanda minus menunjukkan bahwa tegangan σ_x dan σ_y yang bekerja merupakan tegangan tekan. Tegangan tekan ini berperan untuk mencegah ekspansi yang dialami lamina akibat kenaikan suhu.

G. Tegangan dan Regangan pada Laminat dengan Memperhitungkan Efek Higrotermal

Seperti analisis tegangan dan regangan pada laminat yang kita lakukan pada Bab V, mari kita gunakan hipotesis Kirchoff untuk menganalisis tegangan dan regangan pada laminat dengan memperhitungkan efek higrotermal. Ingat bahwa berdasarkan hipotesis Kirchoff, ketika laminat mengalami deformasi, permukaan setiap lamina penyusun selalu tegak lurus dengan garis yang normal terhadap bidang referensi sehingga regangan yang dialami oleh setiap lamina penyusun berkaitan antara satu sama lain. Dengan demikian, berdasarkan

hipotesis tersebut, ketika terjadi perubahan suhu pada laminat, regangan termal bebas yang dialami oleh setiap lamina penyusun tidak lagi sama dengan regangan termal bebas yang dialami oleh sebuah lamina seperti yang sudah kita bahas pada subbab sebelumnya. Hal ini disebabkan oleh koefisien deformasi termal yang bisa saja berbeda pada setiap lamina penyusun. Perbedaan koefisien deformasi termal tersebut dapat disebabkan oleh perbedaan arah serat dan perbedaan sifat dari setiap lamina penyusun.



Gambar 8.3 Lamina pada Lapisan 1, 2, dan 3 yang Memiliki Perbedaan Koefisien Deformasi Termal

Kita sudah membahas bahwa perbedaan koefisien ekspansi termal antara serat dan matriks dapat menghasilkan tegangan termal pada level mikro ketika sebuah lamina mengalami perubahan suhu. Dengan alasan yang sama, tentu perbedaan koefisien deformasi termal antarlamina pada suatu laminat juga bisa menimbulkan tegangan termal pada level makro. Berdasarkan Gambar 8.3, misalkan α_{x1} dan α_{x2} secara berturut-turut merupakan koefisien deformasi termal pada arah x dari lamina 1 dan 2. Kemudian, misalkan $\alpha_{x1} > \alpha_{x2}$. Jika lamina 1 dan 2 sama-sama mengalami kenaikan suhu sebesar ΔT , karena $\alpha_{x1} > \alpha_{x2}$, ekspansi yang akan dialami oleh lamina 1 ditahan oleh lamina 2. Lamina 1 akan mengalami tegangan tekan pada arah x dan lamina 2 akan mengalami tegangan tarik pada arah x .

Perubahan suhu ΔT dihitung dari suhu ketika tegangan di sepanjang ketebalan laminat pada suhu tersebut sama dengan nol. Pada keadaan tersebut, laminat berada dalam keadaan *tanpa tegangan*. Nantinya, kita akan membahas bahwa suhu ketika laminat berada dalam keadaan tanpa tegangan sangat dipengaruhi oleh proses fabrikasi dari laminat tersebut.

Untuk menentukan tegangan di sepanjang ketebalan laminat, kita bisa menggunakan cara yang kita gunakan pada Bab V. Karena

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 + z\kappa_x^0 \\ \varepsilon_y^0 + z\kappa_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy}^0 \end{bmatrix}, \quad (8.63)$$

tegangan di sepanjang ketebalan laminat dapat dirumuskan sebagai

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 + z\kappa_x^0 - \alpha_x\Delta T - \beta_x\Delta M \\ \varepsilon_y^0 + z\kappa_y^0 - \alpha_y\Delta T - \beta_y\Delta M \\ \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy}^0 - \alpha_{xy}\Delta T - \beta_{xy}\Delta M \end{bmatrix}. \quad (8.64)$$

Untuk menyederhanakan pembahasan, mari kita asumsikan bahwa kelembapan laminat tidak berubah sehingga $\Delta M = 0$. Dengan demikian, persamaan (8.64) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 + z\kappa_x^0 - \alpha_x\Delta T \\ \varepsilon_y^0 + z\kappa_y^0 - \alpha_y\Delta T \\ \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy}^0 - \alpha_{xy}\Delta T \end{bmatrix}. \quad (8.65)$$

Perhatikan bahwa berdasarkan persamaan (8.65), tegangan bergantung pada z . Kemudian, ingat bahwa matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi pada persamaan (8.65) juga bisa berbeda-beda pada setiap lapisan.

Contoh 8.5

Bidang referensi sebuah elemen laminat dengan susunan $[\pm 45/0]_S$ mengalami regangan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= 950 \times 10^{-6}, & \kappa_x^0 &= 0, \\ \varepsilon_y^0 &= 0, & \kappa_y^0 &= 0, \\ \gamma_{xy}^0 &= 0, & \kappa_{xy}^0 &= 0. \end{aligned}$$

Diketahui bahwa regangan tersebut terjadi pada suhu 60°C dan suhu ketika laminat berada dalam keadaan tanpa tegangan adalah 25°C . Kemudian, setiap lamina penyusun memiliki sifat dengan $E_1 = 55 \text{ GPa}$, $E_2 = 15 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0,25$, $G_{12} = 7 \text{ GPa}$, $\alpha_1 = 6,34 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$, $\alpha_2 = 22 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$, $\beta_1 = 425 \times 10^{-6} / \%$, dan $\beta_2 = 6.250 \times 10^{-6} / \%$. Jika ketebalan setiap lamina penyusun adalah $0,15 \text{ mm}$, tentukan tegangan σ_x , σ_y , dan τ_{xy} yang bekerja di sepanjang ketebalan laminat tersebut. Kemudian, tentukan juga tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} yang bekerja di sepanjang ketebalan laminat tersebut. Asumsikan bahwa kelembapan laminat tidak berubah.

Jawab

- a) Soal ini dapat diselesaikan dengan menggunakan persamaan (8.64). Karena $\varepsilon_y^0 = \gamma_{xy}^0 = \kappa_x^0 = \kappa_y^0 = \kappa_{xy}^0 = 0$ dan $\varepsilon_x^0 = 950 \times 10^{-6}$, persamaan tersebut dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (950 \times 10^{-6}) - \alpha_x \Delta T \\ -\alpha_y \Delta T \\ -\alpha_{xy} \Delta T \end{bmatrix}. \quad (a)$$

Berdasarkan soal, perubahan suhu dari keadaan tanpa tegangan adalah $\Delta T = 60^\circ\text{C} - 25^\circ\text{C} = 35^\circ\text{C}$. Kemudian, perhatikan bahwa soal ini hampir sama dengan Contoh 5.3. Perbedaannya hanya pada contoh ini, kita akan memperhitungkan efek termal akibat perubahan suhu sebesar 35°C . Pada Contoh 5.3, kita juga sudah menentukan matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi dari setiap lamina, yaitu

$$\bar{Q}(0^\circ) = \begin{bmatrix} 5,60 & 0,38 & 0 \\ 0,38 & 1,53 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}, \quad (b)$$

$$\bar{Q}(45^\circ) = \begin{bmatrix} 2,67 & 1,27 & 1,02 \\ 1,27 & 2,67 & 1,02 \\ 1,02 & 1,02 & 1,60 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}, \quad (c)$$

$$\bar{Q}(-45^\circ) = \begin{bmatrix} 2,67 & 1,27 & -1,02 \\ 1,27 & 2,67 & -1,02 \\ -1,02 & -1,02 & 1,60 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}. \quad (d)$$

Selanjutnya, kita perlu menentukan koefisien deformasi termal dari setiap lamina. Pada lamina dengan serat arah 0° , $\alpha_x = \alpha_1$, $\alpha_y = \alpha_2$, dan $\alpha_{xy} = \alpha_{12}$ sehingga

$$\alpha_x(0^\circ) = 6,34 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}, \quad (e)$$

$$\alpha_y(0^\circ) = 22 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}, \quad (f)$$

$$\alpha_{xy}(0^\circ) = 0. \quad (g)$$

Kemudian, berdasarkan persamaan (8.44), koefisien deformasi termal α_x dari lamina dengan serat arah 45° adalah

$$\alpha_x(45^\circ) = (6,34 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C})(\cos^2 45^\circ) + (22 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C})(\sin^2 45^\circ)$$

maka

$$\alpha_x(45^\circ) = 1,42 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}. \quad (\text{h})$$

Kemudian, berdasarkan persamaan (8.45), koefisien deformasi termal α_y adalah

$$\alpha_y(45^\circ) = (6,34 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C})(\sin^2 45^\circ) + (22 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C})(\cos^2 45^\circ)$$

maka

$$\alpha_y(45^\circ) = 1,42 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}. \quad (\text{i})$$

Sementara itu, berdasarkan persamaan (8.46), koefisien deformasi termal α_{xy} adalah

$$\alpha_{xy}(45^\circ) = 2 \left[(6,34 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}) - (22 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}) \right] \sin 45^\circ \cos 45^\circ$$

maka

$$\alpha_{xy}(45^\circ) = -1,57 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}. \quad (\text{j})$$

Dengan cara yang sama, pada lamina dengan serat arah -45° , akan diperoleh

$$\alpha_x(-45^\circ) = 1,21 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}, \quad (\text{k})$$

$$\alpha_y(-45^\circ) = 1,21 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}, \quad (\text{l})$$

$$\alpha_{xy}(-45^\circ) = 1,57 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}. \quad (\text{m})$$

Sekarang, mari kita tentukan tegangan yang bekerja di sepanjang ketebalan laminat. Dengan $\Delta T = 35^\circ\text{C}$ dan dengan menyubstitusikan persamaan (b), (e), (f), dan (g) ke persamaan (a), tegangan yang bekerja pada lamina dengan serat arah 0° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,60 & 0,38 & 0 \\ 0,38 & 1,53 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (950 \times 10^{-6}) - (6,34 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C})(35^\circ\text{C}) \\ -(22 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C})(35^\circ\text{C}) \\ -(0)(35^\circ\text{C}) \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37,80 \\ -8,97 \\ 0 \end{bmatrix} \text{MPa.} \quad (\text{n})$$

Persamaan (d) berlaku pada rentang $(-0,15 \text{ mm}) \leq z \leq (15 \text{ mm})$.

Kemudian, dengan menyubstitusikan persamaan (c), (h), (i), dan (j) ke persamaan (a), tegangan yang bekerja pada lamina dengan serat arah 45° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,67 & 1,27 & -1,02 \\ 1,27 & 2,67 & -1,02 \\ -1,02 & -1,02 & 1,60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (950 \times 10^{-6}) - (1,42 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C})(35^\circ\text{C}) \\ -(1,42 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C})(35^\circ\text{C}) \\ -(-1,57 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C})(35^\circ\text{C}) \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,40 \\ -1,90 \\ 8,29 \end{bmatrix} \text{MPa.} \quad (\text{o})$$

Persamaan (e) berlaku pada rentang $(-0,45 \text{ mm}) \leq z \leq (-0,30 \text{ mm})$ dan $(0,30 \text{ mm}) \leq z \leq (0,45 \text{ mm})$.

Kemudian, dengan menyubstitusikan persamaan (d), (k), (l) dan (m) ke persamaan (a), tegangan yang bekerja pada lamina dengan serat arah -45° adalah

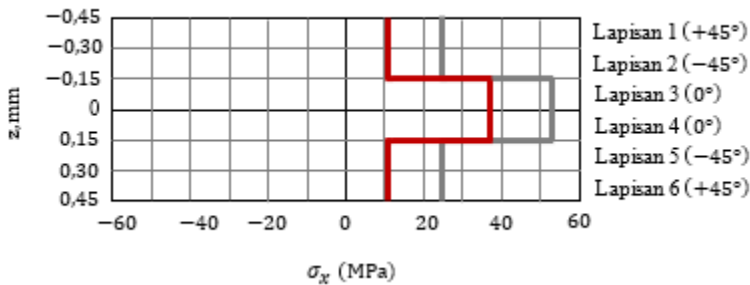
$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,67 & 1,27 & 1,02 \\ 1,27 & 2,67 & 1,02 \\ 1,02 & 1,02 & 1,60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (950 \times 10^{-6}) - (1,42 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C})(35^\circ\text{C}) \\ -(1,42 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C})(35^\circ\text{C}) \\ -(1,57 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C})(35^\circ\text{C}) \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

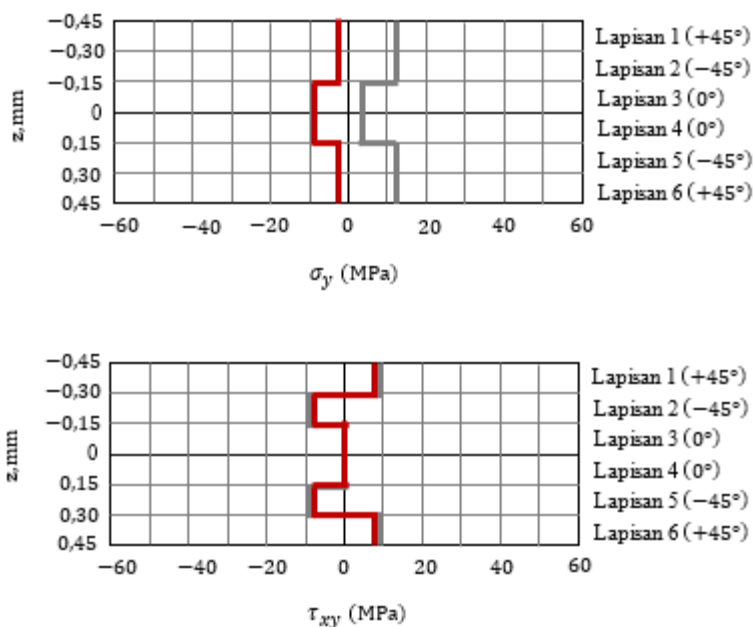
maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,40 \\ -1,90 \\ -8,29 \end{bmatrix} \text{ MPa.} \quad (\text{p})$$

Persamaan (p) berlaku pada rentang $(-0,30 \text{ mm}) \leq z \leq (-0,15 \text{ mm})$ dan $(0,15 \text{ mm}) \leq z \leq (0,30 \text{ mm})$.

Berdasarkan persamaan (n)–(p), tegangan yang bekerja di sepanjang ketebalan laminat dapat digambarkan seperti ditunjukkan pada gambar berikut. Sebagai pembanding, garis abu-abu menunjukkan tegangan-tegangan yang sudah kita bahas pada Contoh 5.3. Terlihat bahwa perubahan suhu memberikan efek yang besar terhadap tegangan total yang dialami laminat ketika mengalami deformasi.





- b) Pada lamina dengan serat arah 0° , karena arah 1, 2, dan 3 secara berturut-turut searah dengan arah x , y , dan z , berdasarkan persamaan (d), tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} pada lamina tersebut adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37,80 \\ -8,97 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ MPa.} \quad (q)$$

Kemudian, berdasarkan persamaan (4.16), dengan $m = \cos(45^\circ)$ dan $n = \sin(45^\circ)$, tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} pada lamina dengan serat arah 45° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 81,28 \\ 67,98 \\ 15,18 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13,04 \\ -3,54 \\ -6,65 \end{bmatrix} \text{MPa.} \quad (r)$$

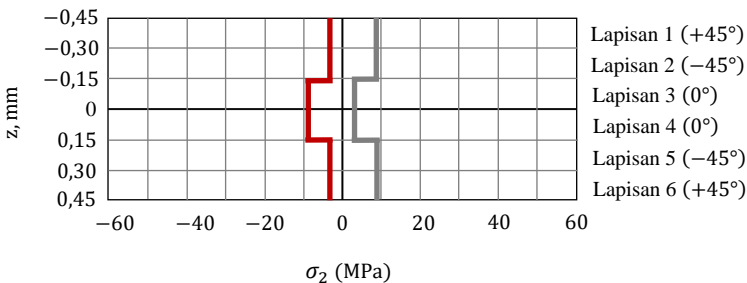
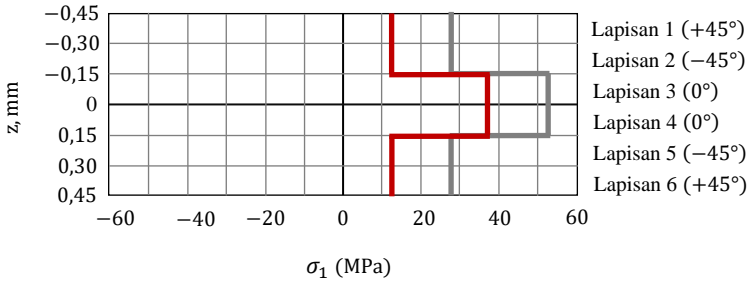
Kemudian, dengan $m = \cos(-45^\circ)$ dan $n = \sin(-45^\circ)$, tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} pada lamina dengan arah serat -45° adalah

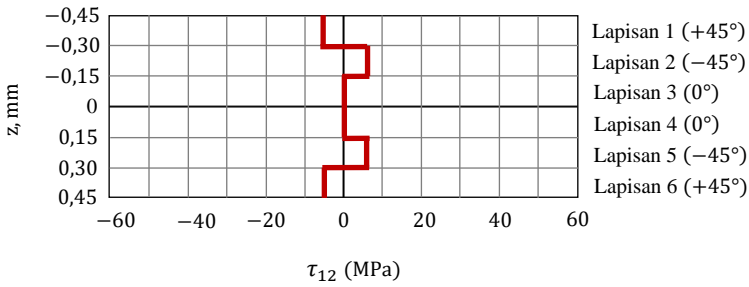
$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 81,28 \\ 67,98 \\ -15,18 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13,04 \\ -3,54 \\ 6,65 \end{bmatrix} \text{MPa.} \quad (s)$$

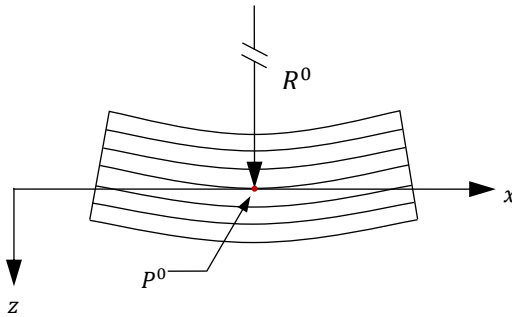
Dengan demikian, berdasarkan persamaan (g), (h), dan (i), tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} yang bekerja di sepanjang ketebalan laminat dapat digambarkan seperti pada gambar berikut.





Contoh 8.6

Misalkan elemen laminat dengan susunan $[\pm 45/0]_S$ mengalami pembengkokan seperti ditunjukkan pada gambar di bawah. Diketahui bahwa radius kelengkungan R^0 adalah 0,15 m dan regangan elemen laminat pada titik P^0 adalah $\varepsilon_x^0 = 500 \times 10^{-6}$.



Kemudian, ketebalan setiap lamina penyusun adalah 0,15 mm, sedangkan ε_y^0 , γ_{xy}^0 , κ_y^0 , dan κ_{xy}^0 bernilai nol. Jika perubahan suhu laminat dari keadaan tanpa tegangan adalah $\Delta T = 30^\circ\text{C}$, laminat tidak mengalami perubahan kelembapan, dan sifat-sifat laminat tersebut sama dengan sifat-sifat laminat pada Contoh 8.5, tentukan tegangan σ_x , σ_y , dan τ_{xy} yang bekerja di sepanjang ketebalan laminat. Kemudian, tentukan juga tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} yang bekerja di sepanjang ketebalan laminat tersebut.

Jawab

- a) Sekali lagi, soal ini hampir sama dengan Contoh 5.4. Perbedaannya hanya pada contoh ini, laminat mengalami kenaikan suhu sebesar $\Delta T = 30^\circ\text{C}$ dari keadaan tanpa tegangan. Pada Contoh 5.4, kita sudah mengetahui bahwa kelengkungan laminat adalah $\kappa_x^0 = 0,0067 \text{ mm}^{-1}$. Kemudian, karena sifat-sifat laminat pada contoh ini sama dengan sifat-sifat laminat pada Contoh 8.5, kita bisa menggunakan nilai koefisien deformasi termal yang sudah kita tentukan pada Contoh tersebut. Dengan demikian, berdasarkan

persamaan (8.64), karena $\varepsilon_y^0 = \gamma_{xy}^0 = \kappa_x^0 = \kappa_y^0 = \kappa_{xy}^0 = 0$ dan $\varepsilon_x^0 = 500 \times 10^{-6}$, dapat dituliskan bahwa

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (500 \times 10^{-6}) + z(0,0067 \text{ mm}^{-1}) - (6,34 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C})(30^\circ\text{C}) \\ -(22 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C})(30^\circ\text{C}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (309,8 \times 10^{-6}) + z(0,0067 \text{ mm}^{-1}) \\ 660 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{a})$$

Sekarang, mari kita tentukan tegangan yang bekerja di sepanjang ketebalan lamina dengan serat arah 0° . Karena matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi dari lamina dengan serat arah 0° diberikan oleh persamaan (b) pada Contoh 8.5, dengan menyubstitusikan persamaan tersebut ke persamaan (a) pada contoh ini, akan diperoleh

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23,51 + z(373,03 \text{ mm}^{-1}) \\ -5,84 + z(25,43 \text{ mm}^{-1}) \\ -3,84 \end{bmatrix} \text{MPa.} \quad (\text{b})$$

Persamaan (a) berlaku pada rentang $(-0,15 \text{ mm}) \leq z \leq (0,15 \text{ mm})$.

Kemudian, dengan menyubstitusikan persamaan (c) pada Contoh 8.5 ke persamaan (a) pada contoh ini, tegangan yang bekerja di sepanjang ketebalan lamina dengan serat arah 45° adalah

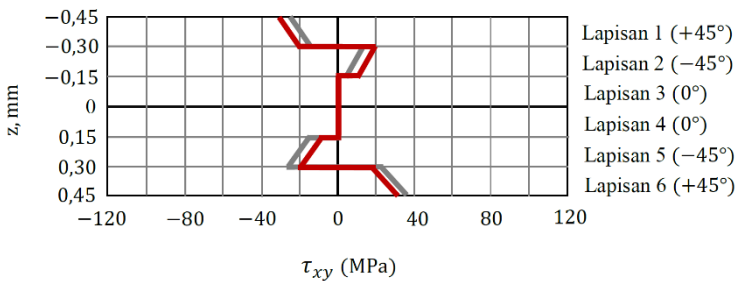
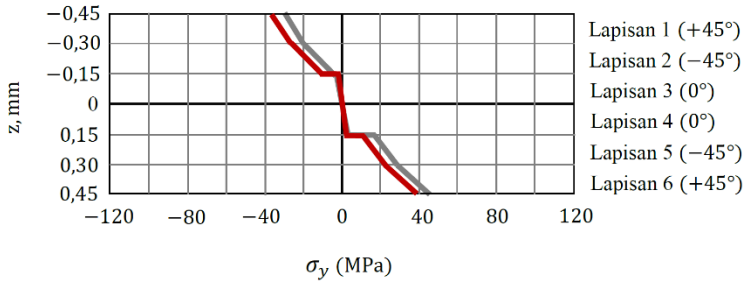
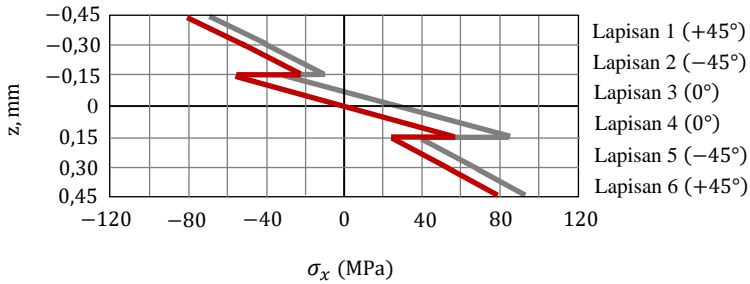
$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 + z(178,07 \text{ mm}^{-1}) \\ -13,05 + z(84,74 \text{ mm}^{-1}) \\ -9,14 + z(67,82 \text{ mm}^{-1}) \end{bmatrix} \text{MPa.} \quad (\text{c})$$

Selanjutnya, dengan menyubstitusikan persamaan (d) pada Contoh 8.5 ke persamaan (a) pada contoh ini, tegangan yang bekerja di sepanjang ketebalan lamina dengan serat arah -45° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,40 + z(178,07 \text{ mm}^{-1}) \\ -1,90 + z(84,74 \text{ mm}^{-1}) \\ -8,29 - z(67,82 \text{ mm}^{-1}) \end{bmatrix} \text{ MPa.} \quad (\text{d})$$

Persamaan (c) berlaku pada rentang $(-0,45 \text{ mm}) \leq z \leq (-0,30 \text{ mm})$ dan $(0,30 \text{ mm}) \leq z \leq (0,45 \text{ mm})$, sedangkan persamaan (i) berlaku pada rentang $(-0,30 \text{ mm}) \leq z \leq (-0,15 \text{ mm})$ dan $(0,15 \text{ mm}) \leq z \leq (0,30 \text{ mm})$.

Tegangan di sepanjang ketebalan laminat yang diberikan oleh persamaan (b)–(d) dapat digambarkan seperti ditunjukkan pada gambar di bawah. Sebagai pembandingan, garis abu-abu menunjukkan tegangan di sepanjang ketebalan lamina yang sudah kita tentukan pada Contoh 5.4. Pada contoh tersebut, kita tidak memperhitungkan efek perubahan suhu.



- b) Pada lamina dengan serat arah 0° , karena arah 1, 2, dan 3 secara berturut-turut searah dengan arah x , y , dan z , berdasarkan persamaan (b), tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} pada lamina tersebut adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23,51 + z(373,03 \text{ mm}^{-1}) \\ -5,84 + z(25,43 \text{ mm}^{-1}) \\ -3,84 \end{bmatrix} \text{MPa.} \quad (\text{e})$$

Kemudian, berdasarkan persamaan (4.16), dengan $m = \cos(45^\circ)$ dan $n = \sin(45^\circ)$, tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} pada lamina dengan serat arah 45° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,25 + z(178,07 \text{ mm}^{-1}) \\ -13,05 + z(84,74 \text{ mm}^{-1}) \\ -9,14 + z(67,82 \text{ mm}^{-1}) \end{bmatrix} \text{MPa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15,54 + z(199,23 \text{ mm}^{-1}) \\ 2,74 + z(63,56 \text{ mm}^{-1}) \\ 6,65 - z(46,67 \text{ mm}^{-1}) \end{bmatrix} \text{MPa.} \quad (\text{f})$$

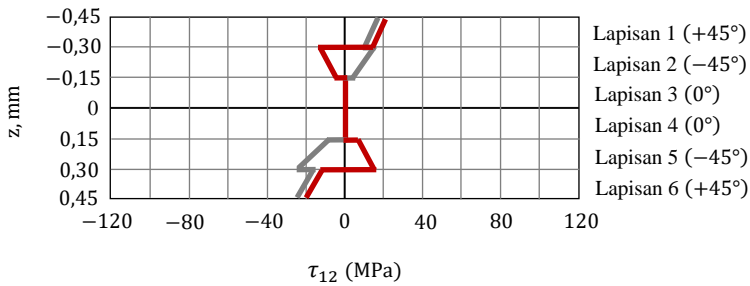
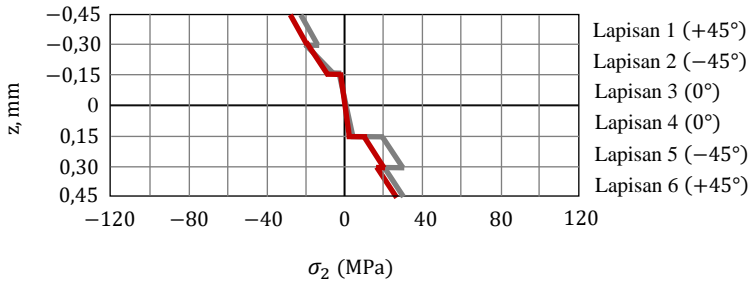
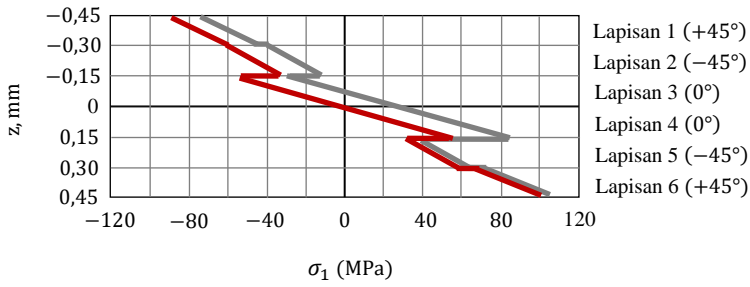
Kemudian, dengan $m = \cos(-45^\circ)$ dan $n = \sin(-45^\circ)$, tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} pada lamina dengan arah serat -45° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11,40 + z(178,07 \text{ mm}^{-1}) \\ -1,90 + z(84,74 \text{ mm}^{-1}) \\ -8,29 - z(67,82 \text{ mm}^{-1}) \end{bmatrix} \text{MPa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13,04 + z(199,23 \text{ mm}^{-1}) \\ -3,54 + z(63,56 \text{ mm}^{-1}) \\ 6,65 + z(46,67 \text{ mm}^{-1}) \end{bmatrix} \text{MPa.} \quad (\text{g})$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (e), (f), dan (g), tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} yang bekerja di sepanjang ketebalan laminat dapat digambarkan seperti ditunjukkan pada gambar berikut.



H. Resultan Tegangan

Sekarang, mari kita tentukan resultan tegangan dan resultan momen yang bekerja pada laminat dengan memperhitungkan efek higrotermal. Untuk itu, kita kembali menggunakan hipotesis Kirchhoff. Perhatikan bahwa persamaan (8.64) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 + z\kappa_x^0 - \alpha_x\Delta T - \beta_x\Delta M \\ \varepsilon_y^0 + z\kappa_y^0 - \alpha_y\Delta T - \beta_y\Delta M \\ \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy}^0 - \alpha_{xy}\Delta T - \beta_{xy}\Delta M \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} \\
&- \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_x \Delta T \\ \alpha_y \Delta T \\ \alpha_{xy} \Delta T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_x \Delta M \\ \beta_y \Delta M \\ \beta_{xy} \Delta M \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{8.66}$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (6.9) dan (8.66), dapat dituliskan bahwa

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} &= \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz \\
\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} &= \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left(\begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} \right) dz \\
&+ \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left(- \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_x \Delta T \\ \alpha_y \Delta T \\ \alpha_{xy} \Delta T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_x \Delta M \\ \beta_y \Delta M \\ \beta_{xy} \Delta M \end{bmatrix} \right) dz
\end{aligned} \tag{8.67}$$

Integral pertama pada ruas kanan persamaan (8.67) sudah kita tentukan pada Bab VI. Integral tersebut diberikan oleh persamaan (6.16). Kemudian, seperti halnya matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi, koefisien deformasi termal dan koefisien deformasi kelembapan juga bisa berbeda-beda pada setiap lapisan. Dengan demikian, persamaan (8.67) dapat dijabarkan lagi sebagai

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} &= A \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} \\
&- \Delta T \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz
\end{aligned}$$

$$-\Delta M \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{bmatrix}_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz$$

maka

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} &= A \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} \\ &- \Delta T \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_k (z_k - z_{k-1}) \\ &- \Delta M \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{bmatrix}_k (z_k - z_{k-1}). \end{aligned} \quad (8.68)$$

Dengan mendefinisikan N^T sebagai

$$N^T = \begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \Delta T \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_k (z_k - z_{k-1}) \quad (8.69)$$

dan N^M sebagai

$$N^M = \begin{bmatrix} N_x^M \\ N_y^M \\ N_{xy}^M \end{bmatrix} = \Delta T \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{bmatrix}_k (z_k - z_{k-1}), \quad (8.70)$$

persamaan (8.68) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_x^M \\ N_y^M \\ N_{xy}^M \end{bmatrix}. \quad (8.71)$$

N^T dan N^M pada persamaan (8.69) dan (8.70) secara berturut-turut disebut sebagai *resultan tegangan termal* dan *resultan tegangan kelembapan*.

I. Resultan Momen dengan Efek Higrotermal

Selanjutnya, mari kita tentukan rumusan resultan momen dengan memperhitungkan efek higrotermal. Berdasarkan persamaan (6.17) dan (8.67), dapat dituliskan bahwa

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z \, dz$$

maka

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} &= \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left(\begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} \right) z \, dz \\ &+ \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left(- \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_x \Delta T \\ \alpha_y \Delta T \\ \alpha_{xy} \Delta T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_x \Delta M \\ \beta_y \Delta M \\ \beta_{xy} \Delta M \end{bmatrix} \right) z \, dz. \end{aligned} \tag{8.72}$$

Integral pertama pada ruas kanan persamaan (8.72) sudah kita tentukan pada Bab VI. Integral tersebut diberikan oleh persamaan (6.21). Dengan demikian, persamaan (8.72) dapat dijabarkan lagi sebagai

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} &= B \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + D \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} \\ &- \Delta T \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} z \, dz \end{aligned}$$

$$-\Delta M \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{bmatrix}_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} z \, dz$$

maka

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} &= B \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + D \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} \\ &\quad - \frac{\Delta T}{2} \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ &\quad - \frac{\Delta M}{2} \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{bmatrix}_k (z_k^2 - z_{k-1}^2). \end{aligned} \quad (8.73)$$

Dengan mendefinisikan N^M sebagai

$$M^T = \begin{bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{bmatrix} = \frac{\Delta T}{2} \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (8.74)$$

dan M^M sebagai

$$M^M = \begin{bmatrix} M_x^M \\ M_y^M \\ M_{xy}^M \end{bmatrix} = \frac{\Delta M}{2} \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{bmatrix}_k (z_k^2 - z_{k-1}^2), \quad (8.75)$$

persamaan (8.73) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + D \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_x^M \\ M_y^M \\ M_{xy}^M \end{bmatrix}. \quad (8.76)$$

M^T dan M^M pada persamaan (8.74) dan (8.75) secara berturut-turut disebut sebagai *resultan momen termal* dan *resultan momen kelembapan*.

Contoh 8.7

Sebuah laminat dengan susunan $(\pm 30/0)_S$ mengalami kenaikan suhu sebesar 100°C dari keadaan tanpa tegangan. Diketahui bahwa gaya luar yang bekerja pada laminat sama dengan nol dan setiap lamina penyusun memiliki sifat dengan $E_1 = 70 \text{ GPa}$, $E_2 = 16 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0,25$, $G_{12} = 9 \text{ GPa}$, $\alpha_1 = 6,50 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$, $\alpha_2 = 25 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$, $\beta_1 = 425 \times 10^{-6} / \%$, dan $\beta_2 = 6.250 \times 10^{-6} / \%$. Jika kelembapan laminat tidak berubah dan ketebalan setiap lamina penyusun adalah $0,15 \text{ mm}$, tentukan resultan tegangan termal dan resultan momen termal dari laminat tersebut. Asumsikan bahwa sifat-sifat lamina tidak berubah selama kenaikan suhu.

Jawab

- a) Resultan tegangan termal dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (8.69). Untuk itu, mari kita tentukan terlebih dahulu matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi dan koefisien deformasi termal dari masing-masing laminat. Matriks kekakuan tereduksi dari setiap lamina adalah

$$\bar{Q}(0^\circ) = \begin{bmatrix} 7,10 & 0,41 & 0 \\ 0,41 & 1,62 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}, \tag{a}$$

$$\bar{Q}(30^\circ) = \begin{bmatrix} 4,92 & 1,21 & 1,65 \\ 1,21 & 2,18 & 0,72 \\ 1,65 & 0,72 & 1,71 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}, \tag{b}$$

$$\bar{Q}(-30^\circ) = \begin{bmatrix} 4,92 & 1,21 & -1,65 \\ 1,21 & 2,18 & -0,72 \\ -1,65 & -0,72 & 1,71 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}. \tag{c}$$

Kemudian, koefisien deformasi termal dari lamina dengan serat arah 0° adalah

$$\alpha_x(0^\circ) = 6,50 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}, \tag{d}$$

Buku ini tidak diperjualbelikan.

$$\alpha_y(0^\circ) = 2,50 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}, \quad (\text{e})$$

$$\alpha_{xy}(0^\circ) = 0; \quad (\text{f})$$

koefisien deformasi termal dari lamina dengan serat arah 45° adalah

$$\alpha_x(45^\circ) = 1,58 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}, \quad (\text{g})$$

$$\alpha_y(45^\circ) = 1,58 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}, \quad (\text{h})$$

$$\alpha_{xy}(45^\circ) = -1,85 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}; \quad (\text{i})$$

dan koefisien deformasi termal dari lamina dengan serat arah -45° adalah

$$\alpha_x(-45^\circ) = 1,58 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}, \quad (\text{j})$$

$$\alpha_y(-45^\circ) = 1,58 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}, \quad (\text{k})$$

$$\alpha_{xy}(-45^\circ) = 1,85 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}. \quad (\text{l})$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (8.69), resultan tegangan laminat adalah

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} &= \Delta T \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_k (z_k - z_{k-1}) \\ &= 100^\circ\text{C} \left\{ \begin{bmatrix} 4,92 & 1,21 & 1,65 \\ 1,21 & 2,18 & 0,72 \\ 1,65 & 0,72 & 1,71 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,58 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C} \\ 1,58 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C} \\ -1,85 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C} \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa} \right. \\ &\quad \times [(-0,30 \text{ mm}) - (-0,45 \text{ mm})] \\ &\quad + \begin{bmatrix} 4,92 & 1,21 & -1,65 \\ 1,21 & 2,18 & -0,72 \\ -1,65 & -0,72 & 1,71 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,58 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C} \\ 1,58 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C} \\ 1,85 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C} \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa} \\ &\quad \left. \times [(-0,15 \text{ mm}) - (-0,30 \text{ mm})] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} 7,10 & 0,41 & 0 \\ 0,41 & 1,62 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6,50 \times 10^{-6} / \text{C} \\ 2,50 \times 10^{-5} / \text{C} \\ 0 \end{bmatrix} \\
& \times 10^{10} \text{ Pa} \times [0 - (-0,15 \text{ mm})] \\
& + \begin{bmatrix} 7,10 & 0,41 & 0 \\ 0,41 & 1,62 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6,50 \times 10^{-6} / \text{C} \\ 2,50 \times 10^{-5} / \text{C} \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa} \\
& \times [(0,15 \text{ mm}) - 0] \\
& + \begin{bmatrix} 3,28 & 1,48 & -1,37 \\ 1,48 & 3,28 & -1,37 \\ -1,37 & -1,37 & 1,98 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,58 \times 10^{-5} / \text{C} \\ 1,58 \times 10^{-5} / \text{C} \\ 1,85 \times 10^{-5} / \text{C} \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa} \\
& \times [(0,30 \text{ mm}) - (0,15 \text{ mm})] \\
& + \begin{bmatrix} 3,28 & 1,48 & 1,37 \\ 1,48 & 3,28 & 1,37 \\ 1,37 & 1,37 & 1,98 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,58 \times 10^{-5} / \text{C} \\ 1,58 \times 10^{-5} / \text{C} \\ -1,85 \times 10^{-5} / \text{C} \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa} \\
& \times [(0,45 \text{ mm}) - (0,30 \text{ mm})] \left. \vphantom{\begin{matrix} + \\ + \\ + \\ + \end{matrix}} \right\} \\
& = \begin{bmatrix} 48.711 \\ 40.859 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ N/m.}
\end{aligned}$$

Terlihat bahwa meskipun tidak ada gaya luar yang bekerja, resultan tegangan tetap ada akibat perubahan suhu. Kemudian, perhatikan bahwa karena kelembapan laminat tidak berubah dan tidak ada gaya luar yang bekerja pada laminat, ini berarti bahwa resultan tegangan total sama dengan resultan tegangan termal.

- b) Resultan momen termal dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (8.74). Perhatikan bahwa rumusan momen termal tersebut mengandung faktor $(z_k^2 - z_{k-1}^2)$ seperti rumusan matriks B . Dengan demikian, karena susunan laminat adalah simetri, resultan momen termal yang bekerja adalah

$$\begin{bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

J. Matriks *ABD* dengan Efek Higrotermal

Berdasarkan persamaan (8.71) dan (8.76), kita bisa menuliskan hubungan resultan tegangan dan resultan momen dengan regangan dan kelengkungan bidang referensi dengan memperhitungkan efek higrotermal. Perhatikan bahwa persamaan (8.71) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_x^M \\ N_y^M \\ N_{xy}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad (8.77)$$

dan persamaan (8.76) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_x^M \\ M_y^M \\ M_{xy}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix}. \quad (8.78)$$

Dengan demikian, persamaan (8.77) dan (8.78) dapat ditulis dalam bentuk yang lebih padu sebagai

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \\ M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_x^M \\ N_y^M \\ N_{xy}^M \\ M_x^M \\ M_y^M \\ M_{xy}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad (8.79)$$

Jika kedua ruas persamaan (8.79) dikalikan dengan invers matriks ABD , dapat dituliskan bahwa

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} & b_{11} & b_{12} & b_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} & b_{12} & b_{22} & b_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} & b_{16} & b_{26} & b_{66} \\ b_{11} & b_{12} & b_{16} & d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} & d_{12} & d_{22} & d_{26} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} & d_{16} & d_{26} & d_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x + N_x^T + N_x^M \\ N_y + N_y^T + N_y^M \\ N_{xy} + N_{xy}^T + N_{xy}^M \\ M_x + M_x^T + M_x^M \\ M_y + M_y^T + M_y^M \\ M_{xy} + M_{xy}^T + M_{xy}^M \end{bmatrix} \quad (8.80)$$

dengan matriks 6×6 pada ruas kanan persamaan (8.80) merupakan invers matriks ABD .

Contoh 8.8

Tentukan regangan dan tegangan yang bekerja di sepanjang ketebalan laminat pada Contoh 8.7.

Jawab

- a) Karena satu-satunya resultan tegangan yang bekerja pada laminat pada Contoh 8.7 adalah resultan tegangan termal, persamaan (8.80) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} & b_{11} & b_{12} & b_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} & b_{12} & b_{22} & b_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} & b_{16} & b_{26} & b_{66} \\ b_{11} & b_{12} & b_{16} & d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} & d_{12} & d_{22} & d_{26} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} & d_{16} & d_{26} & d_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \\ M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{bmatrix}. \quad (a)$$

Kemudian, seperti yang sudah kita bahas pada Bab VI, karena susunan laminat adalah simetri, persamaan (a) dapat ditulis dalam dua persamaan terpisah, yaitu

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & A_{16}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & A_{26}^* \\ A_{16}^* & A_{26}^* & A_{66}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} \quad (b)$$

dan

$$\begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ D_{12}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ D_{16}^* & D_{26}^* & D_{66}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{bmatrix}. \quad (c)$$

Pada Contoh 8.7 kita sudah menentukan bahwa resultan momen termal sama dengan nol sehingga perubahan suhu hanya menyebabkan terjadinya regangan normal yang diberikan oleh persamaan (b). Seperti yang sudah kita lakukan pada Bab VI, matriks A^* adalah

$$A^* = \begin{bmatrix} 2,14 & -1,01 & 0 \\ -1,01 & 6,04 & 0 \\ 0 & 0 & 7,72 \end{bmatrix} \times 10^{-8} \text{ Pa}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}. \quad (d)$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (d) dan resultan tegangan termal yang sudah kita tentukan pada Contoh 8.7, regangan normal yang dialami oleh bidang referensi laminat adalah

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,14 & -1,01 & 0 \\ -1,01 & 6,04 & 0 \\ 0 & 0 & 7,72 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48.711 \\ 40.859 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{-8}$$

$$= \begin{bmatrix} 627 \times 10^{-6} \\ 1.976 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sementara itu, resultan momen termal sama dengan nol maka laminat tidak mengalami kelengkungan sehingga bisa dituliskan bahwa

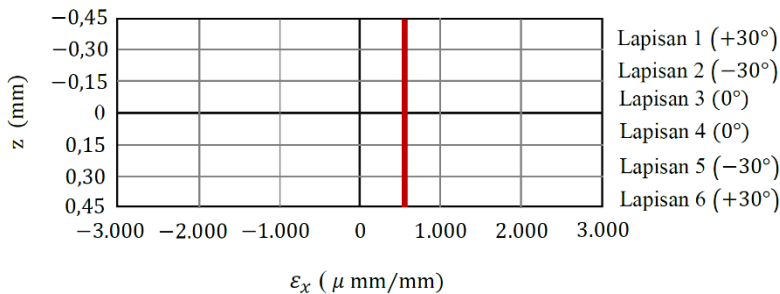
$$\begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

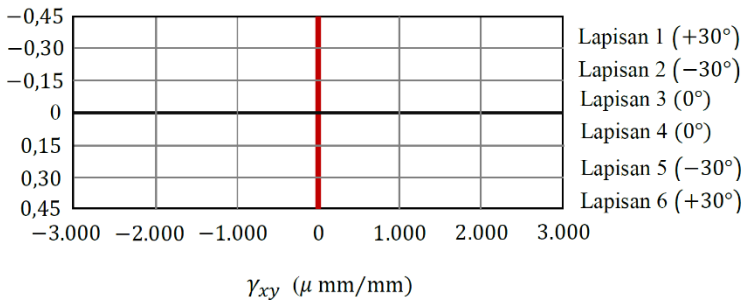
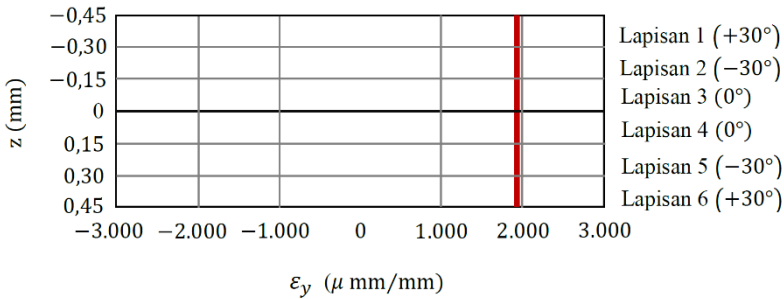
Dengan demikian, regangan di sepanjang ketebalan laminat adalah

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 + z\kappa_x^0 \\ \varepsilon_y^0 + z\kappa_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 627 \times 10^{-6} \\ 1.976 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jika digambarkan, regangan yang bekerja pada lapisan laminat tersebut seperti ditunjukkan pada gambar berikut.





Pada Contoh 8.7, kita sudah menentukan matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi dari setiap lamina. Dengan demikian, karena kita juga sudah menentukan regangan di sepanjang ketebalan laminat, tegangan di sepanjang ketebalan lamina dengan serat arah 0° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,10 & 0,41 & 0 \\ 0,41 & 1,62 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 627 \times 10^{-6} \\ 1.976 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52,58 \\ 34,63 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ MPa.} \quad (e)$$

Persamaan (e) berlaku pada rentang $(-0,15 \text{ mm}) \leq z \leq (15 \text{ mm})$.

Tegangan yang bekerja pada lamina dengan serat arah 30° adalah

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,92 & 1,21 & 1,65 \\ 1,21 & 2,18 & 0,72 \\ 1,65 & 0,72 & 1,71 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 627 \times 10^{-6} \\ 1.976 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54,89 \\ 50,78 \\ 24,58 \end{bmatrix} \text{MPa.} \quad (f)$$

Tegangan yang bekerja pada lamina dengan serat arah -30° adalah

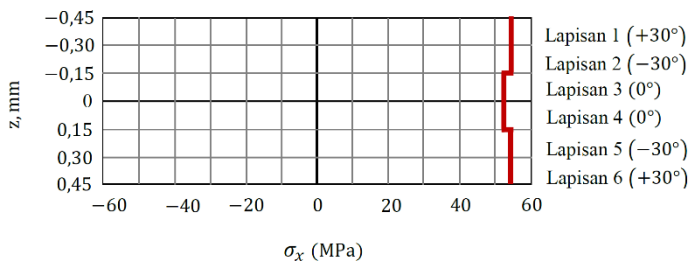
$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,92 & 1,21 & -1,65 \\ 1,21 & 2,18 & -0,72 \\ -1,65 & -0,72 & 1,71 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 627 \times 10^{-6} \\ 1,976 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ Pa}$$

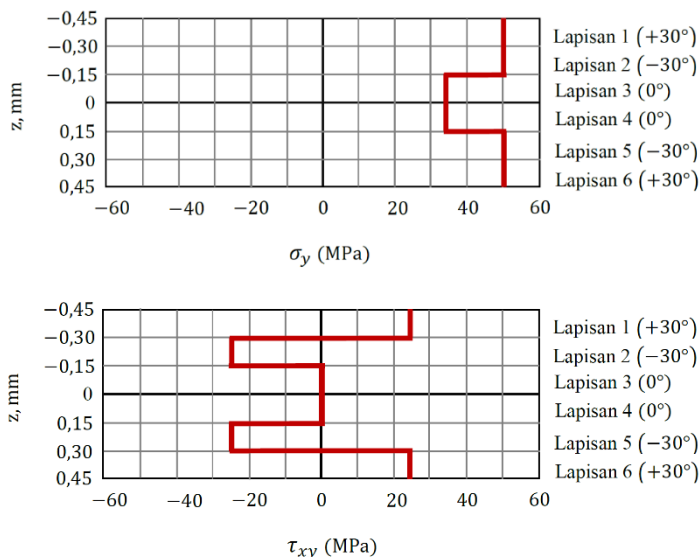
maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54,89 \\ 50,78 \\ -24,58 \end{bmatrix} \text{MPa.} \quad (g)$$

Persamaan (f) berlaku pada rentang $(-0,45 \text{ mm}) \leq z \leq (-0,30 \text{ mm})$ dan $(0,30 \text{ mm}) \leq z \leq (0,45 \text{ mm})$, sedangkan persamaan (g) berlaku pada rentang $(-0,30 \text{ mm}) \leq z \leq (-0,15 \text{ mm})$ dan $(0,15 \text{ mm}) \leq z \leq (0,30 \text{ mm})$. Terlihat bahwa meskipun tidak ada gaya luar yang bekerja, laminat juga dapat mengalami tegangan di sepanjang ketebalan laminat tersebut akibat perubahan suhu. Selain itu, efek perubahan kelembapan juga memiliki bentuk yang sama dengan efek perubahan suhu maka perubahan kelembapan juga bisa menghasilkan tegangan di sepanjang ketebalan laminat meskipun tidak ada gaya luar yang bekerja.

Berdasarkan persamaan (e), (f), dan (g), tegangan-tegangan yang bekerja dapat digambarkan seperti ditunjukkan pada gambar di bawah.





K. Koefisien Deformasi Termal dan Koefisien Deformasi Kelembapan

Misalkan sebuah laminat mengalami perubahan suhu. Kemudian, selama perubahan suhu tersebut, kelembapan laminat tidak berubah dan laminat tidak menerima gaya dari luar. Dengan demikian, persamaan (8.80) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} & b_{11} & b_{12} & b_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} & b_{12} & b_{22} & b_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} & b_{16} & b_{26} & b_{66} \\ b_{11} & b_{12} & b_{16} & d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} & d_{12} & d_{22} & d_{26} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} & d_{16} & d_{26} & d_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \\ M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{bmatrix}. \quad (8.81)$$

Persamaan (8.81) menunjukkan bahwa regangan bidang referensi hanya mungkin disebabkan oleh resultan tegangan termal dan resultan momen termal. Dengan kata lain, karena resultan tegangan termal dan resultan momen termal disebabkan oleh perubahan suhu, regangan yang diberikan oleh persamaan (8.81) adalah regangan yang disebabkan oleh perubahan suhu.

Untuk mendeskripsikan hubungan antara regangan dan perubahan suhu pada laminat, kita bisa mendefinisikan *koefisien deformasi termal* dari sebuah laminat. Karena $\varepsilon = \alpha \Delta T$, koefisien deformasi termal α_x , α_y , dan α_z dari laminat didefinisikan sebagai

$$\alpha_x = \frac{\varepsilon_x^0}{\Delta T}; \tag{8.82}$$

$$\alpha_y = \frac{\varepsilon_y^0}{\Delta T}; \tag{8.83}$$

$$\alpha_{xy} = \frac{\gamma_{xy}^0}{\Delta T}; \tag{8.84}$$

dengan regangan ε_x^0 , ε_y^0 , dan γ_{xy}^0 dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (8.81). Akan tetapi, penentuan koefisien deformasi termal yang diberikan oleh persamaan (8.82)–(8.84) mengharuskan kita untuk mengetahui perubahan suhu dari laminat. Supaya perubahan suhu laminat tidak harus diketahui, kita bisa merumuskan koefisien deformasi termal laminat ketika $\Delta T = 1^\circ\text{C}$. Ketika $\Delta T = 1^\circ\text{C}$, persamaan (8.82)–(8.84) dapat ditulis sebagai

$$\alpha_x = (\hat{\varepsilon}_x^0) / ^\circ\text{C}, \tag{8.85}$$

$$\alpha_y = (\hat{\varepsilon}_y^0) / ^\circ\text{C}, \tag{8.86}$$

$$\alpha_{xy} = (\hat{\gamma}_{xy}^0) / ^\circ\text{C}, \tag{8.87}$$

dengan $\hat{\varepsilon}_x^0$, $\hat{\varepsilon}_y^0$, dan $\hat{\gamma}_{xy}^0$ adalah regangan laminat akibat perubahan suhu sebesar $\Delta T = 1^\circ$.

Sekarang, kita perlu menentukan rumusan untuk menentukan $\hat{\varepsilon}_x^0$, $\hat{\varepsilon}_y^0$, dan $\hat{\gamma}_{xy}^0$. Dengan mendefinisikan resultan *tegangan termal satuan* dan *resultan momen termal satuan* sebagai \hat{N}_T dan \hat{M}_T , yaitu

$$\hat{N}_T = \begin{bmatrix} \hat{N}_x^T \\ \hat{N}_y^T \\ \hat{N}_{xy}^T \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta T} \begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix}, \tag{8.88}$$

$$\hat{M}_T = \begin{bmatrix} \hat{M}_x^T \\ \hat{M}_y^T \\ \hat{M}_{xy}^T \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta T} \begin{bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{bmatrix}, \tag{8.89}$$

persamaan (8.81) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} & b_{11} & b_{12} & b_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} & b_{12} & b_{22} & b_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} & b_{16} & b_{26} & b_{66} \\ b_{11} & b_{12} & b_{16} & d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} & d_{12} & d_{22} & d_{26} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} & d_{16} & d_{26} & d_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{N}_x^T \\ \widehat{N}_y^T \\ \widehat{N}_{xy}^T \\ \widehat{M}_x^T \\ \widehat{M}_y^T \\ \widehat{M}_{xy}^T \end{bmatrix} \Delta T$$

sehingga

$$\begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_x^0 \\ \hat{\varepsilon}_y^0 \\ \hat{\gamma}_{xy}^0 \\ \hat{\kappa}_x^0 \\ \hat{\kappa}_y^0 \\ \hat{\kappa}_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} & b_{11} & b_{12} & b_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} & b_{12} & b_{22} & b_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} & b_{16} & b_{26} & b_{66} \\ b_{11} & b_{12} & b_{16} & d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} & d_{12} & d_{22} & d_{26} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} & d_{16} & d_{26} & d_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{N}_x^T \\ \widehat{N}_y^T \\ \widehat{N}_{xy}^T \\ \widehat{M}_x^T \\ \widehat{M}_y^T \\ \widehat{M}_{xy}^T \end{bmatrix}, \quad (8.90)$$

dengan $\hat{\kappa}_x^0$, $\hat{\kappa}_y^0$, dan $\hat{\kappa}_{xy}^0$ adalah kelengkungan laminat akibat perubahan suhu sebesar $\Delta T = 1^\circ$. Dengan demikian, meskipun kita tidak mengetahui perubahan suhu yang dialami suatu laminat, koefisien deformasi termal laminat dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (8.85)–(8.87). Untuk menggunakan persamaan tersebut, regangan $\hat{\varepsilon}_x^0$, $\hat{\varepsilon}_y^0$, dan $\hat{\gamma}_{xy}^0$ dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (8.90). Kemudian, berdasarkan persamaan (8.69) dan (8.88), resultan tegangan termal satuan dapat dirumuskan sebagai

$$\begin{bmatrix} \widehat{N}_x^T \\ \widehat{N}_y^T \\ \widehat{N}_{xy}^T \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_k (z_k - z_{k-1}) \quad (8.91)$$

dan berdasarkan persamaan (8.74) dan (8.89), resultan momen termal satuan dapat dirumuskan sebagai

$$\begin{bmatrix} \hat{M}_x^T \\ \hat{M}_y^T \\ \hat{M}_{xy}^T \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_k (z_k^2 - z_{k-1}^2). \quad (8.92)$$

Dengan cara yang sama, koefisien deformasi kelembapan dapat dirumuskan sebagai

$$\beta_x = (\hat{\varepsilon}_x^0)/\%, \quad (8.93)$$

$$\beta_y = (\hat{\varepsilon}_y^0)/\%, \quad (8.94)$$

$$\beta_{xy} = (\hat{\gamma}_{xy}^0)/\%, \quad (8.95)$$

dengan $\hat{\varepsilon}_x^0$, $\hat{\varepsilon}_y^0$, dan $\hat{\gamma}_{xy}^0$ sekarang merupakan regangan akibat perubahan kelembapan sebesar $\Delta M = 1\%$. Regangan tersebut dapat ditentukan dengan menggunakan

$$\begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_x^0 \\ \hat{\varepsilon}_y^0 \\ \hat{\gamma}_{xy}^0 \\ \hat{\kappa}_x^0 \\ \hat{\kappa}_y^0 \\ \hat{\kappa}_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} & b_{11} & b_{12} & b_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} & b_{12} & b_{22} & b_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} & b_{16} & b_{26} & b_{66} \\ b_{11} & b_{12} & b_{16} & d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} & d_{12} & d_{22} & d_{26} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} & d_{16} & d_{26} & d_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{N}_x^M \\ \hat{N}_y^M \\ \hat{N}_{xy}^M \\ \hat{M}_x^M \\ \hat{M}_y^M \\ \hat{M}_{xy}^M \end{bmatrix}, \quad (8.96)$$

dengan

$$\begin{bmatrix} \hat{N}_x^M \\ \hat{N}_y^M \\ \hat{N}_{xy}^M \end{bmatrix} = \hat{N}_M = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{bmatrix}_k (z_k - z_{k-1}) \quad (8.97)$$

dan

$$\begin{bmatrix} \hat{M}_x^M \\ \hat{M}_y^M \\ \hat{M}_{xy}^M \end{bmatrix} = \hat{M}_M = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_k (z_k^2 - z_{k-1}^2). \quad (8.98)$$

\widehat{N}_M dan \widehat{M}_M secara berturut-turut disebut sebagai resultan tegangan kelembapan satuan dan resultan momen kelembapan satuan.

Contoh 8.9

Tentukan koefisien deformasi termal dari laminat dengan susunan $(60/30/0)_S$. Diketahui bahwa lamina penyusunnya memiliki sifat-sifat $E_1 = 80$ GPa, $E_2 = 15$ GPa, $\nu_{12} = 0,25$, $G_{12} = 7$ GPa, $\alpha_1 = 6,10 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$, $\alpha_2 = 23 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$, $\beta_1 = 425 \times 10^{-6} / \%$, dan $\beta_2 = 6.250 \times 10^{-6} / \%$. Kemudian, diketahui juga bahwa kelembapan laminat tidak berubah dan ketebalan setiap lamina penyusun adalah 0,15 mm.

Jawab

Karena susunan laminat adalah simetri, persamaan (8.96) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \widehat{\varepsilon}_x^0 \\ \widehat{\varepsilon}_y^0 \\ \widehat{\gamma}_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & A_{16}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & A_{26}^* \\ A_{16}^* & A_{26}^* & A_{66}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{N}_x^T \\ \widehat{N}_y^T \\ \widehat{N}_{xy}^T \end{bmatrix}. \quad (a)$$

Seperti yang sudah kita lakukan sebelumnya, diperoleh bahwa

$$\begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & A_{16}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & A_{26}^* \\ A_{16}^* & A_{26}^* & A_{66}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,52 & -0,56 & -1,28 \\ -0,56 & 4,88 & -2,82 \\ -1,28 & -2,82 & 10,30 \end{bmatrix} \times 10^{-8} \text{ Pa}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}. \quad (b)$$

Kemudian, resultan tegangan termal satuan akan dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (8.91). Dengan menentukan terlebih dahulu koefisien deformasi termal dan matriks kekakuan tereduksi yang ditransformasi dari masing-masing lamina, akan diperoleh

$$\begin{bmatrix} \widehat{N}_x^T \\ \widehat{N}_y^T \\ \widehat{N}_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 460,31 \\ 397,66 \\ 54,25 \end{bmatrix} \text{ N/m}. \quad (c)$$

Dengan menyubstitusikan persamaan (b) dan (c) ke persamaan (a), akan diperoleh

$$\begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_x^0 \\ \hat{\varepsilon}_y^0 \\ \hat{\gamma}_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,52 & -0,56 & -1,28 \\ -0,56 & 4,88 & -2,82 \\ -1,28 & -2,82 & 10,30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 460,31 \\ 397,66 \\ 54,25 \end{bmatrix} \times 10^{-8}$$

$$= \begin{bmatrix} 8,68 \\ 15,32 \\ -11,50 \end{bmatrix} \times 10^{-6}.$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (8.85)–(8.87), koefisien deformasi termal laminat adalah

$$\alpha_x = 8,68 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C},$$

$$\alpha_y = 15,32 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C},$$

$$\alpha_{xy} = -11,50 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}.$$

L. Efek Higrotermal terhadap Kekuatan

Karena perubahan suhu dan perubahan kelembapan memengaruhi tegangan yang bekerja di sepanjang ketebalan laminat, tentu perubahan tersebut juga berpengaruh terhadap kekuatan suatu laminat. Untuk memprediksi kekuatan laminat dengan memperhitungkan efek higrotermal, kita dapat menggunakan cara yang hampir sama dengan yang kita lakukan pada Bab VII. Perbedaannya adalah efek higrotermal diperhitungkan ketika menentukan tegangan yang bekerja di sepanjang ketebalan laminat. Untuk lebih jelasnya, mari kita lihat contoh berikut.

Contoh 8.10

Sebuah silinder dengan diameter 0,1 m dibuat dari laminat dengan susunan $(60/45/30)_S$. Silinder tersebut menerima gaya pada arah aksial seperti ditunjukkan pada gambar di bawah. Diketahui bahwa setiap lamina penyusun memiliki sifat $E_1 = 65 \text{ GPa}$, $E_2 = 14 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0,25$, $G_{12} = 8 \text{ GPa}$, $\alpha_1 = 6,30 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$, $\alpha_2 = 23 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$, $\beta_1 = 415 \times 10^{-6} / \%$, dan $\beta_2 = 6.220 \times 10^{-6} / \%$. Diketahui bahwa kelembapan laminat tidak berubah dan ketebalan setiap lamina penyusun adalah 0,25 mm dan kekuatan lamina diberikan oleh $\sigma_1^{\text{tek}} = -600 \text{ MPa}$, $\sigma_1^{\text{tar}} = 1.000 \text{ MPa}$, $\sigma_2^{\text{tek}} = -120 \text{ MPa}$, $\sigma_2^{\text{tar}} = 40 \text{ MPa}$, dan $\tau_{12}^{\text{maks}} = 65 \text{ MPa}$. Jika silinder tersebut dipanaskan

sehingga mengalami kenaikan suhu sebesar $\Delta T = 60^\circ\text{C}$ dari keadaan tanpa tegangan, tentukan besar gaya F_x maksimum yang mampu ditahan silinder tersebut, baik gaya tekan maupun gaya tarik. Asumsikan bahwa sifat-sifat lamina tidak berubah selama kenaikan suhu.



Jawab

Seperti yang sudah kita lakukan pada Contoh 7.6, Resultan tegangan N_x yang diberikan oleh gaya F_x adalah

$$N_x = \frac{F}{2\pi R} = \frac{F}{2\pi(0,05 \text{ m})}$$

maka

$$N_x = \frac{F}{0,314 \text{ m}}. \tag{a}$$

Kemudian, matriks A^* dari laminat adalah

$$A^* = \begin{bmatrix} 2,96 & -0,47 & -1,77 \\ -0,47 & 2,96 & -1,77 \\ -1,77 & -1,77 & 6,55 \end{bmatrix} \times 10^{-8} \text{ Pa}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}. \tag{b}$$

Selanjutnya, seperti yang sudah kita lakukan pada Contoh 8.7, resultan tegangan termal laminat adalah

$$\begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38.044 \\ 38.044 \\ 6.062 \end{bmatrix} \text{ N/m}. \tag{c}$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (8.80), karena laminat simetris dan kelembapan laminat tidak berubah, dapat dituliskan bahwa

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & A_{16}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & A_{26}^* \\ A_{16}^* & A_{26}^* & A_{66}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x + N_x^T \\ N_y + N_y^T \\ N_{xy} + N_{xy}^T \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2,96 & -0,47 & -1,77 \\ -0,47 & 2,96 & -1,77 \\ -1,77 & -1,77 & 6,55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (F/0,314 \text{ m}) + 38.044 \\ 0 + 38.044 \\ 0 + 6.062 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (9,42 \times 10^{-8} \text{ N}^{-1}) F + 0,00083797 \\ (-1,51 \times 10^{-8} \text{ N}^{-1}) F + 0,00083797 \\ (-5,63 \times 10^{-8} \text{ N}^{-1}) F - 0,00094832 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

atau

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00083797 \\ 0,00083797 \\ -0,00094832 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (9,42 \times 10^{-8} \text{ N}^{-1}) F \\ (-1,51 \times 10^{-8} \text{ N}^{-1}) F \\ (-5,63 \times 10^{-8} \text{ N}^{-1}) F \end{bmatrix} \text{N}^{-1}. \quad (\text{d})$$

Sekarang, mari kita tentukan tegangan σ_x , σ_y , dan τ_{xy} yang bekerja pada setiap lamina. Dengan mengalikan matriks kekakuan tereduksi dari lamina arah 30° dengan persamaan (d), diperoleh

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32,53 \\ 19,29 \\ 3,88 \end{bmatrix} \text{MPa} + \begin{bmatrix} 3.217,12 F \\ 384,31 F \\ 487,56 F \end{bmatrix} \text{m}^{-2}. \quad (\text{e})$$

Dengan mengalikan matriks kekakuan tereduksi dari lamina arah 45° dengan persamaan (d), diperoleh

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24,27 \\ 24,27 \\ 4,36 \end{bmatrix} \text{MPa} + \begin{bmatrix} 1.871,41 F \\ 121,74 F \\ -482 F \end{bmatrix} \text{m}^{-2}. \quad (\text{f})$$

Kemudian, dengan mengalikan matriks kekakuan tereduksi dari lamina arah 60° dengan persamaan (d), diperoleh

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19,29 \\ 32,53 \\ 3,88 \end{bmatrix} \text{MPa} + \begin{bmatrix} 1.280,89 F \\ -506,05 F \\ -482,74 F \end{bmatrix} \text{m}^{-2}. \quad (\text{g})$$

Selanjutnya, kita perlu mentransformasikan persamaan (e)–(f) ke sistem koordinat utama. Untuk lamina dengan serat arah 30° , dapat dituliskan bahwa

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19,29 \\ 32,53 \\ 3,88 \end{bmatrix} \text{MPa} \\ &+ \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.280,89 F \\ -506,05 F \\ -482,74 F \end{bmatrix} \text{m}^{-2} \end{aligned}$$

maka

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32,59 \\ 19,24 \\ -3,79 \end{bmatrix} \text{MPa} + \begin{bmatrix} 2.931,16 F \\ 670,28 F \\ -982,86 F \end{bmatrix} \text{m}^{-2}. \quad (\text{h})$$

Dengan cara yang sama, tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} yang bekerja pada lamina dengan serat arah 45° dan 60° secara berturut-turut diberikan oleh persamaan (i) dan (j) berikut:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28,63 \\ 19,91 \\ 0 \end{bmatrix} \text{MPa} + \begin{bmatrix} 991,75 F \\ 1.001,39 F \\ -874,84 F \end{bmatrix} \text{m}^{-2}, \quad (\text{i})$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32,59 \\ 19,24 \\ 3,79 \end{bmatrix} \text{MPa} + \begin{bmatrix} -477,38 F \\ 1.252,22 F \\ -532,40 F \end{bmatrix} \text{m}^{-2}. \quad (\text{j})$$

Selanjutnya, berdasarkan data-data pada soal, setiap lamina akan mengalami kegagalan jika tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} melanggar pertidaksamaan berikut.

$$\begin{bmatrix} -600 \text{ MPa} \\ -120 \text{ MPa} \\ -65 \text{ MPa} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 1.000 \text{ MPa} \\ 40 \text{ MPa} \\ 65 \text{ MPa} \end{bmatrix}. \quad (\text{k})$$

Dengan demikian, pada lamina dengan serat arah 30° , berdasarkan persamaan (h) dan pertidaksamaan (k), lamina tersebut akan mengalami kegagalan akibat tegangan tekan pada arah 1, tegangan tekan pada arah 2, dan tegangan geser τ_{12} negatif jika gaya F yang bekerja secara berturut-turut diberikan oleh baris pertama, kedua, dan ketiga pada persamaan (l) berikut.

$$\begin{bmatrix} 32,59 \\ 19,24 \\ -3,79 \end{bmatrix} \text{MPa} + \begin{bmatrix} 2.931,16 F \\ 670,28 F \\ -982,86 F \end{bmatrix} \text{m}^{-2} = \begin{bmatrix} -600 \text{ MPa} \\ -120 \text{ MPa} \\ -65 \text{ MPa} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} F \\ F \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -215,82 \\ -207,73 \\ 62,28 \end{bmatrix} \text{kN}. \quad (\text{l})$$

Kemudian, lamina dengan serat arah 30° akan mengalami kegagalan akibat tegangan tarik pada arah 1, tegangan tarik pada arah 2, dan tegangan geser τ_{12} positif jika gaya F yang bekerja secara berturut-turut diberikan oleh baris pertama, kedua, dan ketiga pada persamaan (m) berikut.

$$\begin{bmatrix} 32,59 \\ 19,24 \\ -3,79 \end{bmatrix} \text{MPa} + \begin{bmatrix} 2.931,16 F \\ 670,28 F \\ -982,86 F \end{bmatrix} \text{m}^{-2} = \begin{bmatrix} 1.000 \text{ Mpa} \\ 40 \text{ Mpa} \\ 65 \text{ Mpa} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} F \\ F \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 330,04 \\ 30,97 \\ -69,99 \end{bmatrix} \text{kN}. \quad (\text{m})$$

Selanjutnya, berdasarkan persamaan (i) dan pertidaksamaan (k), lamina dengan serat arah 45° akan mengalami kegagalan akibat tegangan tekan pada arah 1, tegangan tekan pada arah 2, dan tegangan geser negatif jika gaya F yang

bekerja secara berturut-turut diberikan oleh baris pertama, kedua dan ketiga pada persamaan (n) berikut.

$$\begin{bmatrix} 28,63 \\ 19,91 \\ 0 \end{bmatrix} \text{Mpa} + \begin{bmatrix} 991,75 F \\ 1.001,39 F \\ -874,84 F \end{bmatrix} \text{m}^{-2} = \begin{bmatrix} -600 \text{ Mpa} \\ -120 \text{ Mpa} \\ -65 \text{ Mpa} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} F \\ F \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -633,86 \\ -139,72 \\ 74,30 \end{bmatrix} \text{kN.} \quad (\text{n})$$

Lamina dengan serat arah 45° akan mengalami kegagalan akibat tegangan tarik pada arah 1, tegangan tarik pada arah 2, dan tegangan geser positif jika gaya F yang bekerja secara berturut-turut diberikan oleh baris pertama, kedua, dan ketiga pada persamaan (o) berikut.

$$\begin{bmatrix} 28,63 \\ 19,91 \\ 0 \end{bmatrix} \text{MPa} + \begin{bmatrix} 991,75 F \\ 1.001,39 F \\ -874,84 F \end{bmatrix} \text{m}^{-2} = \begin{bmatrix} 1.000 \text{ MPa} \\ 40 \text{ MPa} \\ 65 \text{ MPa} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} F \\ F \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 979,45 \\ 20,06 \\ -74,30 \end{bmatrix} \text{kN.} \quad (\text{o})$$

Kemudian, berdasarkan persamaan (j) dan pertidaksamaan (k), lamina dengan serat arah 60° akan mengalami kegagalan akibat tegangan tekan pada arah 1, tegangan tekan pada arah 2, dan tegangan geser negatif jika gaya F yang bekerja secara berturut-turut diberikan oleh baris pertama, kedua, dan ketiga pada persamaan (p) berikut.

$$\begin{bmatrix} 32,59 \\ 19,24 \\ 3,79 \end{bmatrix} \text{MPa} + \begin{bmatrix} -477,38 F \\ 1.252,22 F \\ -532,40 F \end{bmatrix} \text{m}^{-2} = \begin{bmatrix} -600 \text{ MPa} \\ -120 \text{ MPa} \\ -65 \text{ MPa} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} F \\ F \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.325,13 \\ -111,19 \\ 129,21 \end{bmatrix} \text{kN.} \quad (\text{p})$$

Lamina dengan serat arah 60° akan mengalami kegagalan akibat tegangan tarik pada arah 1, tegangan tarik pada arah 2, dan tegangan geser positif jika gaya F yang bekerja secara berturut-turut diberikan oleh baris pertama, kedua, dan ketiga pada persamaan (q) berikut.

$$\begin{bmatrix} 32,59 \\ 19,24 \\ 3,79 \end{bmatrix} \text{MPa} + \begin{bmatrix} -477,38 F \\ 1.252,22 F \\ -532,40 F \end{bmatrix} \text{m}^{-2} = \begin{bmatrix} 1.000 \text{ MPa} \\ 40 \text{ MPa} \\ 65 \text{ MPa} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} F \\ F \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.026,50 \\ 16,58 \\ -114,97 \end{bmatrix} \text{kN.} \quad (q)$$

Berdasarkan persamaan (l)–(q), dapat disimpulkan bahwa batas gaya F yang dapat menyebabkan terjadinya kegagalan pada laminat akibat tegangan tarik pada arah 1 dan arah 2, tegangan tekan pada arah 1 dan 2, serta tegangan geser τ_{12} positif dan negatif ditunjukkan pada tabel di bawah. Berdasarkan tabel tersebut, terlihat bahwa besar gaya tekan maksimum yang mampu ditahan oleh silinder adalah sebesar 69,99 kN, yaitu ketika gaya tekan tersebut menyebabkan lamina dengan serat arah 30° mengalami kegagalan akibat tegangan geser τ_{12} positif. Kemudian, besar gaya tarik maksimum yang mampu ditahan silinder adalah sebesar 16,58 kN, yaitu ketika gaya tarik tersebut menyebabkan lamina dengan serat arah 60° mengalami kegagalan akibat tegangan tarik pada arah 2.

Lamina	Penyebab kegagalan					
	σ_1^{tek}	σ_1^{tar}	σ_2^{tek}	σ_2^{tar}	$-\tau_{12}^{\text{maks}}$	$+\tau_{12}^{\text{maks}}$
30°	-215,82	330,04	-207,73	30,97	62,28	-69,99
45°	-633,86	979,45	-139,72	20,06	74,30	-74,30
60°	1.325,13	-2.026,50	-111,19	16,58	129,21	-114,97

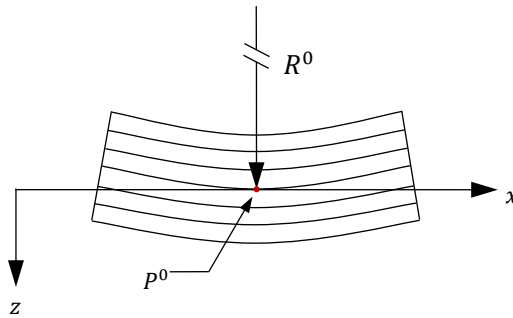
M. Tegangan Sisa saat Proses Fabrikasi

Perlu diketahui bahwa dalam proses fabrikasi laminat atau material komposit dengan matriks polimer, matriks pada laminat tersebut pada awalnya berwujud cair. Matriks pada laminat tersebut kemudian dikeraskan melalui suatu proses yang disebut sebagai proses *pematangan*. Pada jenis-jenis matriks tertentu, proses pematangan tersebut biasanya terjadi pada suhu yang cukup tinggi.

Ketika laminat memasuki proses pendinginan setelah sebelumnya dipanaskan, matriks pada laminat tersebut akan mengeras sehingga pada suhu tertentu, sifat-sifat dari setiap lamina penyusun sudah terbentuk. Pada keadaan tersebut, laminat berada dalam keadaan *tanpa tegangan*. Akan tetapi, pada keadaan tersebut, suhu dari laminat masih cukup tinggi. Oleh sebab itu, ketika proses fabrikasi sudah selesai, yaitu ketika suhu laminat sudah mencapai suhu ruang, ini berarti bahwa laminat mengalami penurunan suhu sehingga bisa menghasilkan tegangan pada setiap lamina penyusun. Tegangan tersebut disebut sebagai *tegangan sisa*. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa proses fabrikasi juga dapat menghasilkan tegangan di sepanjang ketebalan laminat.

Soal-soal

1. Sebuah elemen lamina dengan serat arah 30° mengalami kenaikan suhu sebesar 60°C . Kemudian, selama kenaikan suhu tersebut, diketahui bahwa kelembapan lamina tidak berubah. Tentukan tegangan dari luar yang perlu diberikan untuk mempertahankan ukuran dan bentuk elemen lamina tersebut. Diketahui bahwa $E_1 = 130 \text{ GPa}$, $E_2 = 9 \text{ GPa}$, $G_{12} = 9 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0,25$, $\alpha_1 = -0,017 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$, $\alpha_2 = 21 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$, $\beta_1 = 140 \times 10^{-6} / \%$, dan $\beta_2 = 4.500 \times 10^{-6} / \%$.
2. Tentukan koefisien deformasi termal dan koefisien deformasi kelembapan dari lamina pada soal nomor 1.
3. Sebuah laminat dengan susunan $(60/30/0)_S$ memiliki lamina penyusun dengan sifat $E_1 = 80 \text{ GPa}$, $E_2 = 15 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0,25$, $G_{12} = 7 \text{ GPa}$, $\alpha_1 = 6,10 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$, $\alpha_2 = 23 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$, $\beta_1 = 425 \times 10^{-6} / \%$, dan $\beta_2 = 6.250 \times 10^{-6} / \%$. Kemudian, diketahui juga bahwa kelembapan laminat tidak berubah dan ketebalan setiap lamina penyusun adalah $0,15 \text{ mm}$. Jika laminat tersebut dimatangkan pada suhu 150°C , tentukan tegangan sisa yang terjadi pada suhu ruang (25°C) di sepanjang ketebalan laminat tersebut.
4. Misalkan elemen laminat dengan susunan $[\pm 30/0]_S$ mengalami pembengkokan seperti ditunjukkan pada gambar berikut. Diketahui bahwa radius kelengkungan R^0 adalah $0,20 \text{ m}$ dan regangan elemen laminat pada titik P^0 adalah $\varepsilon_x^0 = 300 \times 10^{-6}$.



Ketebalan setiap lamina penyusun adalah 0,15 mm, sedangkan ε_y^0 , γ_{xy}^0 , κ_y^0 , dan κ_{xy}^0 bernilai nol. Jika perubahan suhu laminat dari keadaan tanpa tegangan adalah $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ dan laminat tidak mengalami perubahan, tentukan tegangan σ_x , σ_y , dan τ_{xy} yang bekerja di sepanjang ketebalan laminat. Kemudian, tentukan juga tegangan σ_1 , σ_2 , dan τ_{12} yang bekerja di sepanjang ketebalan laminat tersebut. Diketahui bahwa sifat lamina penyusun diberikan oleh $E_1 = 75 \text{ GPa}$, $E_2 = 10 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0,25$, $G_{12} = 8 \text{ GPa}$, $\alpha_1 = 6,10 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$, $\alpha_2 = 23 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$, $\beta_1 = 425 \times 10^{-6} / \%$, dan $\beta_2 = 6.250 \times 10^{-6} / \%$.

5. Tentukan koefisien deformasi termal dan koefisien deformasi kelembapan dari lamina pada soal nomor 4.

DAFTAR PUSTAKA

- Buragohain, M. K. (2017). *Composite structure: Design, mechanics, analysis, manufacturing, and testing*. Taylor & Francis Group.
- Callister, W. D., dan Rethwisch, D. G. (2013). *Materials science and engineering*. John Wiley & Sons, Inc.
- Gere, J. M. (2004). *Mechanics of materials*. Thomas Learning.
- Gibson, R. F. (2012). *Principles of composite material mechanics*. CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Hyer, M. W. (1998). *Stress Analysis of fiber-reinforced composite materials*. McGraw-Hill Companies, Inc.
- Kaw, A. K. (2006). *Mechanics of composite materials*. CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Nettless, A. T. (1994). *Basics mechanics of laminated of composite plates*. NASA Reference Publication.
- Pytel, A., & Kiusalaas, J. (2012). *Mechanics of materials*. Cengage Learning.
- Srinath, L. S. (2009). *Advanced mechanics of solids*. Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited.
- Ugural, A. C. (2018). *Plates and shells theory and analysis*. CRC Press, Taylor & Francis Group.

TENTANG PENULIS



Ahmedi Asraf lahir di Payakumbuh pada 2 April 1995. Pendidikan dasar dan menengah ditempuhnya di SDN 4 Padang Datar, SMPN 1 Payakumbuh, dan SMAN 1 Payakumbuh. Ia menyelesaikan pendidikan sarjananya dari program studi S-1 Fisika, Universitas Indonesia pada tahun 2016. Setelah itu, ia bekerja di sebuah perusahaan manufaktur komponen otomotif di Jawa Barat. Kariernya di Badan Riset dan Inovasi Nasional (BRIN) dimulai pada tahun 2019. Pada tahun 2023, dia mulai melanjutkan studinya pada program studi magister ilmu material/ilmu bahan-bahan, departemen Fisika Universitas Indonesia. Sebelumnya, penulis telah menuliskan dua buku teks di bidang fisika dasar. Penulis dapat dihubungi melalui alamat surel ahmedi.asraf@brin.go.id

INDEKS

- arah 1, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 65, 71, 72, 73, 78, 85, 89, 90, 91, 97, 98, 151, 155, 162, 167, 222, 223, 228, 229, 231, 232, 233, 234, 235, 237, 238, 243, 244, 245, 254, 255, 256, 261, 262, 263, 268, 269, 273, 274, 277, 295, 300, 324, 325, 326
- arah 2, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 61, 62, 65, 71, 72, 73, 74, 78, 85, 89, 93, 98, 222, 223, 226, 228, 230, 233, 234, 235, 243, 244, 245, 254, 255, 256, 261, 262, 263, 270, 274, 277, 324, 325, 326
- arah 3, xi, 54, 56, 57, 59, 60, 61, 62, 65, 80, 81, 82, 89, 276
- arah serat, 2, 3, 11, 12, 54, 60, 89, 91, 117, 118, 119, 120, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 131, 132, 135, 136, 137, 150, 151, 155, 158, 163, 164, 170, 195, 201, 222, 225, 228, 230, 238, 242, 283, 287, 289, 296, 300
- bidang referensi, 138, 139, 142, 143, 144, 145, 146, 170, 172, 177, 178, 179, 180, 182, 183, 184, 185, 193, 202, 207, 208, 210, 212, 219, 246, 259, 288, 290, 309, 311, 315
- elemen cangkang, 245, 246
- elemen volume representatif, 30, 34, 35, 36, 39, 43
- fraksi volume, 25, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 40, 41, 42, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52
- invers matriks ABD, 185, 203, 310
- jarak karakteristik, 30, 31
- kegagalan, 15, 25, 46, 47, 221, 222, 223, 224, 225, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 243, 244, 245, 254, 255, 256, 257, 261, 262, 263, 265, 266, 324, 325, 326
- kegagalan lapisan pertama, 238, 239, 240, 245
- kegagalan lapisan terakhir, 239
- kekuatan material komposit, 221, 262
- kelengkungan, 143, 147, 148, 172, 178, 179, 180, 182, 183, 184, 185, 200, 210, 241, 246, 247, 249, 252, 259, 297, 309, 312, 317, 327
- komposit karbon-karbon, 25
- kontraksi lateral, 16, 17
- kopel ekstensi dan pembengkokan, 210
- kurva tegangan vs. regangan, 1, 14, 15
- lamina, 3, 11, 25, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 59, 61, 62, 63, 65, 66, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 77, 78,

79, 80, 81, 84, 85, 86, 87, 89,
 90, 91, 95, 96, 97, 98, 99,
 100, 101, 102, 104, 105, 106,
 107, 108, 111, 113, 114, 115,
 116, 117, 118, 119, 120, 121,
 122, 123, 124, 125, 126, 127,
 129, 130, 131, 132, 133, 135,
 136, 137, 138, 139, 142, 144,
 145, 146, 147, 148, 150, 151,
 152, 153, 155, 157, 158, 159,
 162, 163, 164, 167, 168, 169,
 170, 171, 172, 173, 175, 176,
 180, 186, 187, 188, 195, 196,
 197, 198, 199, 200, 201, 207,
 209, 212, 213, 214, 216, 217,
 218, 219, 221, 222, 223, 224,
 225, 226, 227, 228, 229, 230,
 231, 232, 233, 234, 235, 236,
 237, 238, 239, 240, 241, 242,
 243, 244, 245, 250, 251, 252,
 253, 254, 255, 256, 257, 259,
 260, 261, 262, 263, 265, 266,
 267, 268, 269, 271, 272, 274,
 275, 277, 278, 282, 284, 286,
 287, 288, 289, 290, 291, 292,
 293, 294, 295, 296, 297, 298,
 299, 300, 306, 307, 313, 314,
 319, 320, 322, 323, 324, 325,
 326, 327, 328, 336
 laminat, 3, 25, 53, 54, 89, 90,
 135, 136, 137, 138, 139, 140,
 141, 142, 143, 144, 145, 146,
 147, 148, 149, 150, 151, 152,
 153, 154, 155, 156, 157, 161,
 166, 167, 168, 169, 170, 171,
 172, 173, 175, 176, 177, 178,
 179, 180, 182, 184, 185, 186,
 187, 192, 193, 194, 195, 196,
 197, 200, 201, 202, 203, 207,
 209, 210, 211, 212, 213, 214,
 215, 216, 217, 218, 219, 220,
 221, 222, 238, 239, 240, 241,
 242, 243, 244, 245, 246, 250,
 251, 252, 253, 256, 259, 260,
 263, 266, 267, 274, 288, 289,
 290, 292, 294, 296, 297, 299,
 300, 301, 306, 307, 308, 310,
 311, 312, 313, 314, 315, 316,
 317, 319, 320, 321, 326, 327,
 328, 336
 laminat simetris, 212, 213, 215,
 216, 217, 218, 321
 material komposit, 1, 2, 3, 11,
 25, 27, 29, 30, 31, 79, 135,
 221, 222, 267, 273, 326, 336
 matriks, xiv, xvi, 2, 25, 29, 30,
 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38,
 39, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47,
 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 66,
 67, 68, 69, 70, 76, 77, 78, 79,
 80, 81, 83, 84, 85, 93, 102,
 104, 105, 106, 107, 108, 111,
 112, 113, 114, 115, 128, 129,
 132, 150, 151, 152, 157, 158,
 159, 168, 171, 176, 180, 181,
 182, 183, 184, 185, 186, 187,
 188, 189, 190, 191, 192, 193,
 202, 203, 204, 206, 207, 208,
 209, 210, 211, 212, 213, 216,
 217, 219, 220, 240, 241, 251,
 252, 259, 267, 269, 272, 273,
 275, 276, 277, 278, 285, 286,
 287, 289, 290, 291, 298, 302,
 306, 308, 309, 310, 311, 313,
 319, 321, 322, 326, 327
 Matriks ABD, 175, 176, 184,
 185, 186, 192, 193, 202, 203,
 204, 207, 210, 212, 220, 268,
 309, 310
 matriks kekakuan, 278, 306
 mikromekanika lamina, 29
 modulus elastisitas, 15, 30
 modulus geser, 19, 21, 26, 43,
 44, 45, 46, 48, 52, 84, 108,

- 109, 124, 125, 126, 133, 176,
217, 219, 220
- modulus Young, 14, 15, 16, 17,
25, 26, 30, 35, 36, 37, 38, 40,
41, 45, 52, 55, 58, 60, 62, 71,
76, 84, 108, 109, 116, 117,
118, 119, 120, 125, 133, 176,
214, 215, 216, 217, 219, 220
- penguat, 2, 25
- rasio kekuatan, 228, 229, 230
- rasio kopel, 127, 129, 130, 131,
132
- rasio Poisson, 3, 16, 17, 30, 41,
42, 43, 55, 56, 58, 59, 60, 61,
62, 71, 76, 84, 108, 109, 120,
121, 122, 123, 124, 125, 127,
133, 176, 218, 219, 220
- regangan, xi, 3, 13, 14, 15, 16,
17, 18, 19, 20, 21, 23, 25, 26,
38, 39, 41, 43, 44, 46, 47, 50,
52, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60,
61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68,
70, 71, 77, 78, 79, 80, 81, 82,
83, 84, 85, 86, 87, 90, 95, 96,
97, 98, 99, 100, 101, 102,
104, 105, 106, 107, 108, 111,
112, 114, 116, 117, 120, 121,
124, 127, 130, 131, 132, 133,
135, 139, 142, 143, 144, 145,
146, 147, 148, 149, 150, 152,
155, 157, 167, 168, 169, 170,
171, 172, 173, 179, 180, 182,
183, 184, 185, 186, 187, 193,
194, 195, 197, 200, 201, 202,
207, 208, 209, 210, 211, 213,
219, 220, 222, 241, 243, 244,
252, 259, 262, 263, 264, 266,
267, 268, 269, 270, 271, 272,
273, 274, 275, 276, 277, 278,
279, 280, 281, 284, 286, 288,
290, 297, 309, 310, 311, 312,
313, 315, 316, 317, 318, 327
- regangan geser, 19, 20, 21, 26,
43, 44, 54, 63, 64, 65, 66, 78,
96, 97, 98, 99, 100, 105, 106,
108, 111, 124, 127, 130, 131,
144, 209, 210, 211, 213, 263,
271, 274, 278, 279, 280
- regangan termal bebas, 268, 269,
271, 272, 273, 274, 277, 279,
289
- resultan momen, 175, 177, 178,
182, 184, 185, 186, 202, 207,
209, 210, 213, 219, 245, 246,
248, 249, 301, 304, 306, 308,
309, 311, 312, 315, 316, 317,
319
- resultan momen termal, 306,
308, 311, 312, 315, 316, 317
- resultan tegangan, 175, 176, 177,
178, 179, 182, 183, 184, 185,
186, 187, 202, 207, 209, 210,
213, 214, 219, 245, 246, 247,
248, 249, 251, 257, 258, 301,
304, 306, 307, 308, 309, 310,
311, 315, 316, 317, 319, 321
- resultan tegangan termal, 304,
306, 308, 310, 311, 315, 316,
317, 319, 321
- sistem koordinat utama, 54, 65,
67, 90, 94, 95, 98, 101, 102,
172, 173, 202, 223, 226, 254,
260, 270, 279, 281, 323
- tegangan geser, 3, 6, 7, 8, 9, 10,
11, 12, 13, 19, 20, 21, 26, 30,
31, 43, 44, 45, 54, 62, 63, 64,
65, 66, 91, 105, 107, 108,
111, 124, 125, 127, 131, 144,
176, 177, 178, 182, 209, 214,
217, 222, 223, 224, 225, 226,
228, 230, 236, 237, 238, 243,
244, 245, 248, 249, 254, 255,

256, 261, 262, 264, 265, 266,
324, 325, 326
tegangan komplemen, 11
tegangan normal, 3, 4, 6, 7, 8, 9,
10, 11, 12, 19, 20, 26, 54, 62,
65, 66, 91, 105, 111, 127,
130, 131
tegangan tekan, 4, 5, 6, 15, 18,

26, 31, 222, 223, 225, 228, 231,
232, 233, 234, 235, 237, 238,
243, 244, 245, 254, 255, 256,
261, 266, 269, 279, 288, 289,
324, 325, 326
usaha, 21, 22, 23, 24, 25, 71, 72,
73, 74

Material komposit memiliki banyak keunggulan dibandingkan dengan material-material yang lain. Salah satu keunggulan tersebut adalah sifatnya yang kuat, kaku, sekaligus ringan. Material dengan sifat-sifat yang seperti ini sangat diperlukan untuk pembuatan struktur ringan yang banyak diaplikasikan di berbagai bidang. Melihat luasnya penggunaan material komposit untuk pembuatan struktur ringan maka penjelasan yang komprehensif, sistematis, dan terperinci tentang material tersebut juga sangat diperlukan. Buku ini ditulis dengan harapan dapat menjadi bacaan utama baik bagi pelajar, pengajar, maupun praktisi di bidang material komposit.

Pembahasan pada buku ini terfokus pada analisis tentang mekanika dari material komposit yang berupa lamina dan laminat pada skala makro. Inti dari pembahasan tersebut adalah berupa penjelasan tentang hubungan respons material komposit dengan gaya luar, perubahan suhu, dan perubahan tingkat kelembapan dari material komposit tersebut.

Buku ini terdiri atas delapan bab yang berkaitan antara satu dan lainnya. Bab pertama menjadi dasar untuk mempelajari bab kedua dan seterusnya. Oleh sebab itu, setiap bab pada buku ini harus dipelajari secara berurutan. Kemudian, untuk memudahkan pembaca, di setiap awal bab, terdapat peta konsep yang menunjukkan keterkaitan antarsubbab pada bab tersebut. Selain itu, terdapat contoh-contoh soal terkait konsep-konsep yang diberikan.

Pembaca buku ini diasumsikan telah mempelajari kalkulus, aljabar linier dan fisika dasar mekanika. Pemahaman pembaca tentang mekanika material akan sangat membantu, tetapi pemahaman tersebut tidak menjadi prasyarat untuk mempelajari buku ini.

BRIN Publishing
The Legacy of Knowledge

Diterbitkan oleh:
Penerbit BRIN, anggota Ikapi
Gedung B.J. Habibie Lt. 8,
Jln. M.H. Thamrin No. 8,
Kota Jakarta Pusat 10340
E-mail: penerbit@brin.go.id
Website: penerbit.brin.go.id

DOI: 10.55981/brin.622



ISBN 978-623-8372-73-7

